Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

С. М. БОРОДАЧЁВ

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

*Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве* ***учебного пособия***
*для студентов экономических, управленческих
и информационных направлений обучения*

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 519.816(075.8)
ББК 22.18я73
Б83

Рецензенты:

кафедра «Высшая и прикладная математика» УрГУПС (протокол № 3 от 23 октября 2013 г.) (завкафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. А. Тимофеева*);

канд. физ.-мат. наук старший научный сотрудник Института математики и механики УрО РАН *Ермаков Д. Г.*

Научный редактор – д-р физ.-мат. наук проф. *О. И. Никонов*

Бородачёв, С. М.

Б83 Теория принятия решений: учебное пособие / С. М. Бородачёв. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 124 с.

ISBN 978-5-7996-1196-5

Представлены математические модели и методы, используемые для поддержки принятия управленческих решений в различных условиях информированности. Пособие содержит теоретический материал, упражнения, лабораторный практикум и задания для самостоятельной работы (типовой расчёт). Предназначено для студентов экономических, управленческих и информационных направлений всех форм обучения.

Библиогр.: 13 назв. Табл. 43. Рис. 16.

УДК 519.816(075.8)
ББК 22.18я73

ISBN 978-5-7996-1196-5

Введение

Любая сфера человеческой деятельности связана с принятием решений. В зависимости от предметной области дисциплины, посвящённые этой проблематике, назывались исследование операций, экономико-математические методы, математические методы в управлении.

Для постановки задачи принятия управленческого решения необходимо выполнить два условия:

1. Должна быть возможность выбора, т. е. по крайней мере, 2 варианта действий.
2. Вариант выбирается по определённому принципу. Известны два принципа выбора решения:
   a. Волевой – применяют при отсутствии формализованных моделей.
   b. Критериальный – заключается в принятии некоторого(-ых) критерия(-ев) (мерило) и сравнении возможных вариантов по этому критерию. Принятый критерий называют целевой функцией. Вариант, для которого целевая функция принимает наилучшее значение, называют оптимальным и на нём останавливают выбор.

Классификация задач принятия решений может быть проведена по нескольким признакам:

1. По степени полноты информации об условиях, в которых принимается решение.
   a. Детерминированные задачи – относительно каждого действия известно, что оно неизменно приводит к некоторому конкретному исходу, внешние факторы также известны.
   b. Вероятностные задачи (или задачи с риском) – включают в свои постановки параметры, являющиеся случайными величинами, для которых известны или хотя бы экспертно могут быть оценены распределения вероятностей.

c. Задачи в условиях неопределённости – результаты ваших действий и/или внешние факторы могут быть различными, но их вероятности совершенно неизвестны или не имеют смысла.

2. По используемым математическим методам для их решения (хотя, как правило, степень полноты информации и определяет используемый метод).

1. Элементы линейного программирования

Здесь слово программирование используется в смысле определения программы действий, программы выпуска изделий, т. е. как планирование.

Пример 1.1

Фирма производит скороварки А и кофеварки Б. Основные операции, и производственные мощности (если производить что-то одно, в шт. за неделю):

Операция	Вид продукции	
	А	Б
Штамповка	25000	35000
Отделка	33333	16667
Сборка А	22500	-
Сборка Б	–	15000
Прибыль от шт.	15 рублей	12.5 рубля

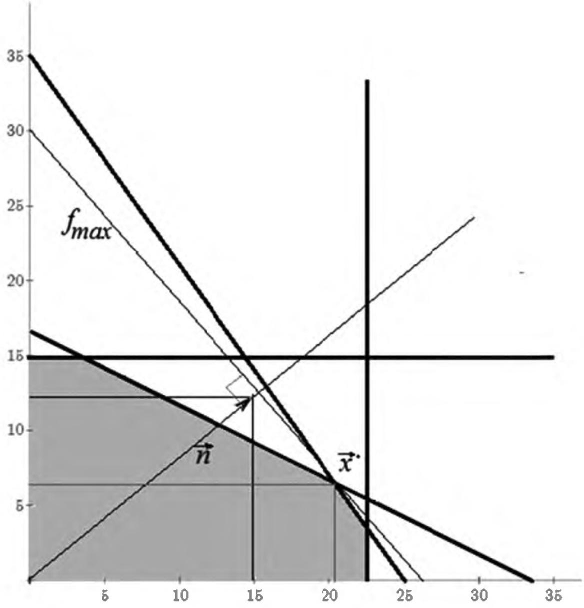
Какова должна быть программа выпуска на следующую неделю x_1 – скороварок, шт., x_2 – кофеварок, шт., чтобы прибыль была максимальной?

Запишем функцию прибыли и ограничения по мощностям. Пусть полная производственная мощность цеха штамповки = 1 и т. д.

$$f(x_1, x_2) = f(\vec{x}) = 15x_1 + 12.5x_2 \to \max.$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{25000} + \dfrac{x_2}{35000} \le 1 \\ \dfrac{x_1}{33333} + \dfrac{x_2}{16667} \le 1 \\ \dfrac{x_1}{22500} \le 1, \dfrac{x_2}{15000} \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Изобразим ограничения и целевую функцию на рисунке.



С учётом знаков неравенств, получаем, что каждая точка допустимого плана выпуска $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ должна находиться внутри заштрихованной области или на её границе.

Рассмотрим семейство прямых $15x_1 + 12{,}5x_2 = f$ (при различных значениях f). Нормальный вектор $\vec{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12{,}5 \end{pmatrix}$ у них одинаков, значит они параллельны. Перемещаем прямую вдоль $\vec{n}$ для получения максимального значения прибыли f (оставаясь в допустимой области!). Находим, что максимум достигается в угловой точке $\vec{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* = 20370 \\ x_2^* = 6481 \end{pmatrix}$. При этом фирма получит максимальную прибыль $f_{\max} = 15x_1^* + 12{,}5x_2^* = 386562{,}5$ руб.

Кстати, использование мощностей по сборке кофеварок будет значительно ниже 100%. Поэтому разумно часть работников отсюда перевести на другие участки.

1.1. Канонический вид задачи линейного программирования

В общем случае число переменных может быть произвольным, $x_1, x_2, ..., x_n$ и подчинены они m ограничениям вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} . \qquad (1)$$

Введя вектор переменных (плана)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

вектор ограничений $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$, матрицу коэффициентов $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$, систему ограничений (1) можно записать в матрично-векторной форме $A\vec{x} \le \vec{b}$.

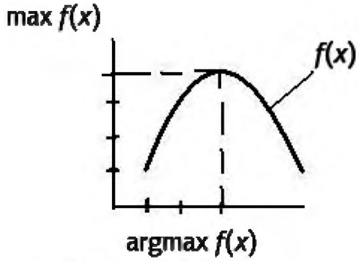
Целевую функцию можно записать $f(\vec{x}) = c_1x_1 + ... + c_nx_n = \vec{c}^{\,T}\vec{x}$, тогда задача линейного программирования примет вид

$$\begin{aligned} &\vec{x}^* = \arg\max_{\vec{x} \in E} \vec{c}^{\,T}\vec{x}; \\ &E = \{\vec{x} : A\vec{x} \le \vec{b}, \vec{x} \ge \vec{0}\}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где E – допустимая область, любая $\vec{x} \in E$ – допустимая точка или план.

Пример 1.2

Понятие *argmax* изображено на рисунке.



max $f(x) = 4$

argmax $f(x) = 3$

Ограничения в виде неравенств можно свести к ограничениям-равенствам вводя дополнительные вспомогательные переменные, поиск максимума целевой функции можно заменить поиском минимума функции, умноженной на -1. Тогда приходим к определению.

Канонический вид задачи линейного программирования – найти вектор плана $\vec{x}^*$, для которого целевая функция $f(\vec{x}) = \vec{c}^T \vec{x}$ достигает минимума на множестве точек E_0, удовлетворяет системе ограничений $A\vec{x} = \vec{b}$, где $\vec{b} \geq \vec{0}$.

$$\begin{aligned} &\vec{x}^* = \arg\min_{\vec{x} \in E_0} \vec{c}^T \vec{x}; \\ &E_0 = \{\vec{x} : A\vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geq \vec{0}\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Вспомним метод Гаусса решение систем линейных уравнений. В нём расширенная матрица системы приводится к ступенчатой форме, определяются базисные и свободные переменные. Если все свободные переменные положить равными нулю, то полученное частное решение системы называется базисным решением.

Теорема

Каждое допустимое базисное решение системы $A\vec{x} = \vec{b}$ есть угловая точка области E_0. Обратно: каждая угловая точка E_0 – допустимое базисное решение.

1.2. Симплекс-метод

Это разработанный Дж. Данцигом (США, 1950-е годы) метод целенаправленного перебора угловых точек, при котором значение целевой функции убывает от точки к точке. Рассмотрим и обоснуем его на примере.

Пример 1.2

Найти x_1^*, x_2^*, обращающие $g(x_1, x_2) = -2x_1 + 0,5x_2$ в максимум при ограничениях $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \ge -3 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$.

Перепишем задачу в каноническом виде (4), для этого умножим второе неравенство на –1, введём уравнивающие вспомогательные переменные x_3, x_4, x_5 в левые части первых 3х неравенств и перейдём к целевой функции $f(\vec{x}) = \vec{c}^T\vec{x} = -g$.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right). \tag{5}$$

Переставим столбцы последней матрицы в порядке 3, 4, 5, 1, 2, 6. Это уже ступенчатая форма. Свободные переменные x_1, x_2. Полагая их = 0, получим допустимое базисное решение $\vec{x}^0 = (0 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad 6)^T$. $f(\vec{x}^0) = 0$, будет ли это наименьшим значением? В $f(\vec{x})$ есть член $-0,5x_2$, который показывает, что x_2 невыгодно считать свободной (и полагать = 0). Лучше сделать $x_2 > 0$, т. е. перевести в базисные (перейти к другой угловой точке). Какая базисная переменная должна при этом перейти в свободные? x_2 желательно сделать максимально положительным, не допуская отрицательности остальных переменных. Из связей переменных (5) видно, что первой достигнет 0 x_3, она и будет свободной. Это уравнение связи называется разрешающим. Начиная с разрешающего уравнения, выражаем базисные переменные и целевую функцию через новые свободные переменные. $f(\vec{x}) = -1 + x_1 + 0.5x_3$. Оба коэффициента при свободных переменных положительны, поэтому минимум достигается при обращении их в 0, что и происходит в текущей угловой точке $\vec{x}^1 = (0 \quad 2 \quad 0 \quad 5 \quad 4)^T$. Значит, она и есть точка минимума. Каноническая задача решена: $\vec{x}^* = \vec{x}^1 = (0 \quad 2 \quad 0 \quad 5 \quad 4)^T$, $f_{\min} = f(\vec{x}^*) = -1$. Решение исходной задачи: ясно, $g_{\max} = 1$ в точке $(x_1^*, x_2^*) = (0, 2)$.

Алгоритм симплекс-метода решения канонической задачи линейного программирования (при известной исходной угловой точке)

1. $i = 0$.

2. $\vec{x}^0$ задаёт выбор базисных и свободных переменных.

3. Выражаем базисные переменные и целевую функцию через свободные переменные.

4. Все ли коэффициенты при неизвестных в целевой функции ≥0? Если «да» – стоп, $\vec{x}^i = \vec{x}^*$. Если «нет» – переход к п. 5.

5. Из свободных переменных, входящих в целевую функцию с отрицательными коэффициентами, выбираем имеющую наименьший номер и переводим её в базисные. Пусть это будет x_l.

6. В выражениях базисных переменных через свободные все ли коэффициенты при $x_l \geq 0$? Если «да» – стоп, целевая функция не ограничена: $f_{\min} = -\infty$. Если «нет» – переход к п. 7.

7. $i = i + 1$

8. Среди базисных переменных находим ту, которая первая обращается в 0 при росте x_l и переводим её в свободные. Соответствующее уравнение выделяют и называют разрешающим. Таким образом, определяется новый набор базисных и свободных переменных новой угловой точке $\vec{x}^i$. Начиная с разрешающего уравнения…переход к п. 3.

Если найдено оптимальное решение, а в выражении целевой функции через свободные переменные отсутствует хоть одна из них, то это означает, что оптимальное решение не единственно.

Исходную угловую точку всегда можно найти следующим образом.

Метод искусственного базиса

В примере 1.2 мы легко нашли исходную угловую точку, взяв за базисные добавочные переменные. А если задача сразу дана в каноническом виде? Используем подобную идею. Добавим в каждое уравнение (4) по искусственной (вспомогательной) переменной u_j, $j = 1,...,m$ и в пространстве R_{n+m} поставим задачу линейного программирования

$$\begin{pmatrix} \vec{x}\,* \\ \vec{u}\,* \end{pmatrix} = \arg\min_{\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{u} \end{pmatrix} \in W_0} (u_1 + ... + u_m);$$
$$W_0 = \{\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{u} \end{pmatrix} : A\vec{x} + \vec{u} = \vec{b}, \vec{x} \geq \vec{0}, u \geq \vec{0}\}. \qquad (6)$$

У этой задачи очевидна исходная угловая точка $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$. Применяя описанный алгоритм найдём решение $\begin{pmatrix} \vec{x}\,* \\ \vec{u}\,* \end{pmatrix}$ задачи (6).

Обозначим $\mu = u_1 * + ... + u_m *$.

Теорема

Если $\mu = 0$, то $\vec{x}\,*$ – угловая точка множества E_0. Если $\mu > 0$, то $E_0 = \varnothing$.

Доказательство

Если $\mu = 0$, то $\vec{u}^* = \vec{0}$ и все (ровно m) ненулевые координаты находятся в $\vec{x}^*$, $\vec{x}^* \in E_0$, значит $\vec{x}^*$ – угловая точка множества E_0.

Если $\mu > 0$, то уравнение $A\vec{x} + \vec{u} = \vec{b}$ не удовлетворить при $\vec{u} = \vec{0}$, значит $E_0 = \varnothing$.

Таким образом, задача (4) решается в два этапа: сначала (6), затем собственно (4).

1.3. Типичные применения линейного программирования

Оптимальное использование ресурсов

Предприятие выпускает n видов изделий. Для их производства используются m видов ресурсов (разное сырье, людские ресурсы, финансовые ресурсы и т. п.). Эти ресурсы ограничены, их запасы составляют в планируемый период $b_1, b_2, \ldots, b_m$ условных единиц. Известны также технологические коэффициенты: a_{ij} – сколько единиц i-го ресурса требуется в производстве единицы j-го вида продукции. c_j – прибыль от реализации единицы j-го вида продукции. Требуется составить такой план выпуска продукции (x_1^* – единицы изделий первого вида, x_2^* – единицы изделий второго вида и т. д.), при котором прибыль предприятия была бы наибольшей.

Пусть будем выпускать план (2), тогда $a_{12}x_2$ – единиц 1-го ресурса пойдёт на всю программу выпуска 2-го вида продукции. Аналогично с другими видами продукции, поэтому общий расход $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$ 1-го ресурса не должен превышать его запас. Записав это для всех ресурсов, имеем (1). Суммарная прибыль – $\vec{c}^T\vec{x}$, в результате получаем задачу линейного программирования (3).

Планирование инвестиций

Пример 1.3

Плановый горизонт – 3 года. Моменты времени их начала и окончания:

$k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$. Существуют 5 инвестиционных проектов с характеристиками:

Момент	Приход, руб., в момент k на вложенный рубль				
	A	B	C	D	E
0	–1	0	–1	–1	0
1	0,3	–1	1,1	0	0
2	1	0.3	0	0	–1
3	0	1	0	1,75	1,4

Отрицательный приход означает инвестирование. В любой момент деньги, вернувшиеся из какого-либо проекта, можно вкладывать в другие, открывающиеся в тот же момент. Всегда деньги можно положить в банк под 6% годовых.

Максимальное вложение в проект A – 500000 рублей. В момент $k = 0$ имеется 1000000 рублей для инвестирования. Цель: составить план инвестиций, максимизирующий сумму денег в $k = 3$.

Обозначим a_k, b_k, c_k, d_k, e_k, s_k – инвестиции в проекты и в банк в момент k.

Ограничения:

$$\begin{cases} a_0 \le 500000 \\ a_0 + c_0 + d_0 + s_0 = 1000000 \ (k=0) \\ b_1 + s_1 = 0{,}3a_0 + 1{,}1c_0 + 1{,}06s_0 \ (k=1) \\ e_2 + s_2 = a_0 + 0{,}3b_1 + 1{,}06s_1 \ \ (k=2) \end{cases}.$$

Целевая функция (приход в момент $k = 3$)

$$f = b_1 + 1{,}75d_0 + 1{,}4e_2 + 1{,}06s_2 \to \max.$$

Имеем ЗЛП с 8 переменными, 4 ограничениями. Найдём решение f_{max} = = 1797600 руб. Т. е. прирост 79,76%. Инвестиции a_0 = 500000, d_0 = 500000, e_2 = = 659000, s_1 = 150000. Остальные = 0.

Транспортная задача

Имеется m пунктов отправления однородного, бесконечно делимого груза с запасом в каждом из них a_i и n пунктов потребления этого груза с потребностями b_j в каждом.

Затраты на перевозку единицы груза из i-го пункта отправления в j пункт потребления известны и равны c_{ij}.

Задача: как спланировать перевозки, т.е. какие количества x_{ij} груза перевести от i-го поставщика к j-му потребителю, чтобы все потребности были удовлетворены, а суммарные затраты на перевозки были минимальны.

Поскольку нельзя вывезти больше запаса, постольку

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} \le a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} \le a_m \end{cases} . \qquad (7)$$

Все потребности должны быть удовлетворены:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \end{cases} . \qquad (8)$$

Суммарные затраты на перевозки

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min . \qquad (9)$$

Уравнения (7)–(9) – открытая транспортная задача, не весь груз должен быть вывезен. Замкнутая транспортная задача – сумма запасов равна сумме потребностей.

Задача о назначениях

Пример 1.4

Пусть имеется 5 исполнителей и 5 работ

Исполнители	Работы				
	1	2	3	4	5
1	2	9	2	7	1
2	6	8	7	6	1
3	4	6	5	3	1
4	4	2	7	3	1
5	5	3	9	5	1

В таблице указано, какое время c_{ij}, ч. требуется каждому исполнителю для выполнения каждой работы.

Задача: назначить исполнителей на работы так, чтобы суммарное время на выполнение всех работ было минимальное.

Обозначим x_{ij} – назначенность i-го исполнителя на j-ю работу.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1,\ i\text{-й назначен на } j\text{-ю работу} \\ 0,\ i\text{-й не назначен на } j\text{-ю работу} \end{cases}.$$

Каждый работник должен быть назначен один раз:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} = 1 \end{cases}. \tag{10}$$

Каждая работа должна быть выполнена один раз:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{n1} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{nn} = 1 \end{cases}. \tag{11}$$

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{nn}x_{nn} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

Видно, что задача о назначениях есть частный случай замкнутой транспортной задачи.

Задача коммивояжёра

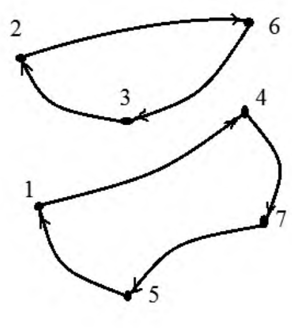
Постановка задачи: есть n городов, стоимости переезда из любого i-го города в любой j-й известны (c_{ij}). Коммивояжёр должен побывать в каждом городе один раз и вернуться в исходный город маршрута, затратив минимум средств на переезды.

Сколько всего возможно маршрутов? Ясно, что каждый из них можно записать в виде последовательности проезжаемых городов, где первый и последний члены «1». Все они отличаются перестановкой (n – 1) элементов (2, 3, …, n) между этими «1». Известно, что число перестановок из (n – 1) элементов равно (n – 1)! Например, при 10 городах 9! = 362880 – число возможных маршрутов. Выбрать самый дешёвый путём перебора сложно.

Для решения задачи введём переменные x_{ij}:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{маршрут включает переезд из } i \text{ в } j \\ 0, \text{маршрут не включает переезд из } i \text{ в } j \end{cases}.$$

Целевая функция $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$. В силу замкнутости маршрута, коммивояжёр из каждого города обязательно в какой-то уедет (10), и в каждый из какого-то приедет (11). Чтобы исключить отсутствие дыижения ($x_{ii} = 1$), примем все $c_{ii} = +\infty$. Т. о. задача коммивояжёра имеет тот же вид, что и задача о назначениях. Но этих условий здесь недостаточно, так как может получиться решение, состоящее из нескольких несвязанных замкнутых маршрутов. Как изображено на рисунке.



Если, например, возникнет петля 2, 6, 3, 2 то для её устранения можно в ограничения добавить неравенство $x_{26}+x_{63}+x_{32}\le 2$ и решить задачу заново. При этом, однако, теряется автоматическая булевость (= 0 или 1) оптимальных x_{ij} и приходится решать задачу целочисленного программирования.

К задаче коммивояжёра сводятся разнообразные задачи производственного менеджмента.

Пример 1.5

Выбор порядка обработки деталей на автоматической линии, при котором затраты времени на наладку были бы минимальны. Поскольку время наладки очередной детали зависит от того, какая деталь обрабатывалась до неё, порядок обработки деталей влияет на суммарные потери времени на наладку станков линии. Время обработки деталей неизменно и не влияет на решение задачи. Т. о. матрица (c_{ij}) – матрица времён переналадки.

Пример 1.6

Строительство n объектов. Строительство каждого состоит из m последовательных стадий (земляные работы, фундамент, кладка стен и т. п.). Продолжительность каждой стадии на каждом объекте известна. Мощность строительной организации не позволяет вести один и тот же вид работ одновременно на нескольких объектах. Считая, что работа на каждом объекте должна продолжаться непрерывно до окончания его строительства, требуется определить сроки начала строительства каждого объекта (а значит и последовательность объектов) так, чтобы суммарный срок строительства всех объектов был минимальным.

1.4. Двойственность в задачах линейного программирования

Вспомним задачу об оптимальном использовании ресурсов. Пусть другая фирма хочет купить все запасы наших ресурсов. Каковы должны быть цены $y_1, y_2, ..., y_m$ за единицу ресурса? Составим

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n \end{cases}.$$

Второе слагаемое в первом неравенстве показывает стоимость второго ресурса в единице продукции 1-го вида, и т. д. Вся сумма – себестоимость единицы продукции 1-го вида. При производстве оно принесёт нам прибыль c_1, поэтому цены продажи ресурсов должны обеспечить не меньше.

Покупатель ресурсов, учитывая ваши соображения, хочет, однако, купить подешевле: $\varphi(\vec{y}) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$. Получили задачу

$$\begin{aligned} &\vec{y}^* = \arg\min_{\vec{y}\in Q} \vec{b}^T\vec{y}; \\ &Q = \{\vec{y} : A^T\vec{y} \geq \vec{c}, \vec{y} \geq \vec{0}\}, \end{aligned} \tag{12}$$

двойственную к *прямой* задаче (3).

Определение: в двойственной задаче ищется противоположный оптимум (*min* ⇆ *max*) целевой функции. Коэффициентами целевой функции являются свободные члены системы ограничений прямой задачи. А свободными членами системы ограничений являются бывшие коэффициенты целевой функции. Матрица коэффициентов меняется на транспонированную, неравенства в системе ограничений – на противоположные.

Таким образом, прямая задача есть двойственная задача для своей двойственной задачи, т. е. они взаимно двойственные.

Теорема

Прямая и двойственная задачи либо обе имеют оптимальные точки $\vec{x}^*, \vec{y}^*$, причём $f_{\max} = \vec{c}^T\vec{x}^* = \vec{b}^T\vec{y}^* = \varphi_{\min}$, либо обе не имеют решения.

Для оптимальных точек выполняются следующие равенства, называющиеся условиями *дополняющей не жёсткости*:

$$\begin{cases} x_j^*(A^T\vec{y}^* - \vec{c})_j = 0, \; j = \overline{1,n} \\ y_i^*(A\vec{x}^* - \vec{b})_i = 0, \; i = \overline{1,m} \end{cases}. \tag{13}$$

Из соотношений (13), зная оптимальное решение одной задачи, можно легко найти оптимальное решение другой.

Пример 1.7

Производство выпускает продукцию 2 видов M и N, которая изготавливается из 4 видов сырья A_1, ..., A_4 . Расход сырья на единицу продукции:

Вид сырья	Запас сырья	M	N
A_1	19	2	3
A_2	13	2	1
A_3	15	0	3
A_4	18	3	0

Прибыль от реализации единицы M – 7 руб., от N – 5 руб. Найти план, дающий максимальную прибыль.

Прямая задача

$$\vec{x}^* = \arg\max_{\vec{x}\in E}(7\ 5)\vec{x};$$

$$E = \{\vec{x} : \begin{pmatrix} 2\,3 \\ 2\,1 \\ 0\,3 \\ 3\,0 \end{pmatrix} \vec{x} \le \begin{pmatrix} 19 \\ 13 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}, \vec{x} \ge \vec{0}\}.$$

Двойственная задача

$$\vec{y}^* = \arg\min_{\vec{y}\in Q}(19\,13\,15\,18)\vec{y};$$

$$Q = \{\vec{y} : \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \vec{y} \ge \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{y} \ge \vec{0}\}.$$

Какую задачу решить проще? Прямую можно графически.

$$\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, f_{\max} = 50.$$

Найдём решение двойственной задачи по соотношениям (13):

$$A\vec{x}^*-\vec{b}=\begin{pmatrix}2&3\\2&1\\0&3\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}19\\13\\15\\18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-6\\-3\end{pmatrix},$$

$\begin{cases}y_1^*\cdot 0=0\\ y_2^*\cdot 0=0\\ y_3^*\cdot(-6)=0\\ y_4^*\cdot(-3)=0\end{cases}$, $\begin{cases}5\cdot(2y_1^*+2y_2^*+0y_3^*+3y_4^*-7)=0\\ 3\cdot(3y_1^*+1y_2^*+3y_3^*+0y_4^*-5)=0\end{cases}$. Решая эти уравнения совместно, находим $\vec{y}^*=\begin{pmatrix}3/4\\11/4\\0\\0\end{pmatrix}$, $\varphi_{\min}=50$.

Координаты y_i^* оптимального решения задачи двойственной по отношению к задаче оптимального использования ресурсов называются *теневыми ценами* (ресурсов) (объективно-обусловленными оценками).

Теневая цена y_i^* показывает, насколько увеличилась бы оптимальная прибыль f, если бы запас b_i этого ресурса был на единицу больше.

Доказательство

$$b_i\Rightarrow\tilde{b}_i=b_i+1,\ \ \tilde{f}^*=b_1y_1^*+b_2y_2^*+\ldots+(b_i+1)y_i^*+\ldots+b_my_m^*=f^*+1y_i^*,\ \ y_i^*=\tilde{f}^*-f^*.$$

В нашем примере теневая цена второго ресурса = 11/4 руб. Ясно, что покупать его на рынке дороже этой цены нам невыгодно. Теневые цены ресурсов, имеющихся в избытке, равны 0.

Переход к двойственной задаче позволяет иногда более просто найти решение исходной задачи.

Упражнения

Упражнение 1.1

Найти решение прямой задачи в примере 1.5.

Упражнение 1.2

Решить задачу ЛП:

$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2$ -> min;

$x_1 + 5x_2 >= 10$;

$3x_1 + 2x_2 >= 12$;

$2x_1 + 4x_2 >= 16$;

$2x_1 + 2x_2 >= 6$;

$x_1 >= 1 \;\; x_1, x_2 >= 0$.

Упражнение 1.3

В продаже имеются напитки:

Напиток	Содержание спирта, %	Цена, руб./кг.
Джин-тоник	10	10
Salute	20	30
Аперитив	25	40
Smirnoff	40	60

В каких пропорциях следует смешать эти напитки, чтобы получить коктейль с содержанием спирта 30 %, и самый дешёвый?

Упражнение 1.4

Решить задачу ЛП:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 4x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 - 5x_5$ -> min;

$-x_1 + 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 5$;

$-x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9$;

$-3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6$;

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 >= 0$,

начав с угловой точки: $(0, 0, 1, 2, 1)^T$.

Упражнение 1.5

Пусть известна матрица d_{ij} – производительности исполнителей по каждой работе. Как найти назначения, максимизирующее g – суммарную производительность? Считается, что мы умеем решать задачу о назначениях (с матрицей $c_{ij} >= 0$, поиск минимума f).

$d =$

7	5	0	3
2	7	1	4
1	3	6	8
5	4	3	2

Упражнение 1.6

В цехе 3 токарных станка и один автомат. Необходимо организовать производство трёх деталей в комплекте: на каждую деталь № 1 три детали № 2 и две детали № 3. Как загрузить станки, чтобы произвести максимальное число комплектов, если дневная производительность по каждой из деталей у станков:

Станок	Деталь		
	№ 1	№ 2	№ 3
Токарный	50	40	80
Автомат	120	90	60

Упражнение 1.7

$f(y_1, y_2) = 1200y_1 + 360y_2$ -> min;

$18y_1 + 12y_2 >= 1$;

$10y_1 - 4y_2 >= 0$;

$10y_1 + 15y_2 >= 1$;

$-5y_1 + 6y_2 >= 0$;

$y_1, y_2 >= 0$.

Упражнение 1.8

Найти решения прямой и двойственной задач.

$x_1 + x_2$ -> min;

$8x_1+5x_2 >= 1$;

$3x_1+6x_2 >= 1$;

$x_1+7x_2 >= 1$;

$x_1, x_2 >=0$.

2. Нелинейное и квадратичное программирование

Задача нелинейного программирования:

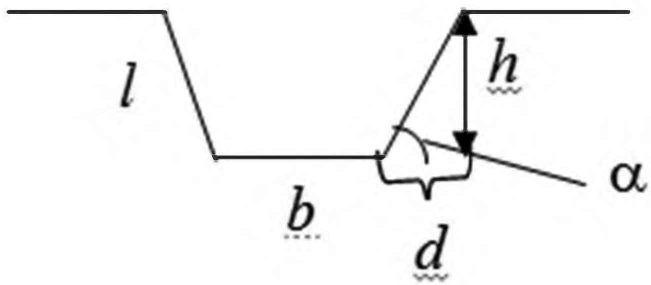
$$\vec{x}^* = \arg\min_{\vec{x}\in M} F(\vec{x});$$

$$M = \{\vec{x} : f_j(\vec{x}) \le 0, j = 1,...,m; \vec{x} \ge \vec{0}\},$$

где $F(\vec{x}), f_j(\vec{x})$ – произвольные нелинейные функции.

Пример 2.1

При каких размерах канал с сечением большим или равным S в форме равнобочной трапеции будет иметь наименьшую поверхность смачивания (наименьшие потери)?



Поверхность смачивания будет минимальна

$u = b + 2l = b + 2\sqrt{h^2 + d^2} \to \min$ при сохранении сечения $\begin{cases} b \cdot h + d \cdot h \ge S \\ b, h, d \ge 0 \end{cases}$.

Эта задача нелинейного программирования имеет решение $h^* = \dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}, d^* = \dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3^3}}, b^* = \dfrac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3^3}}$, $\alpha^* = 60°$.

Задача квадратичного программирования (частный случай задачи нелинейного программирования, когда целевая функция квадратична, а ограничения линейны):

$$\begin{aligned}&\vec{x}^* = \arg\min_{\vec{x}\in M}(\vec{c}^T\vec{x} + \vec{x}^T K\vec{x})\\ &M = \{\vec{x} : A\vec{x} \le \vec{b}, \vec{x} \ge \vec{0}\}\end{aligned}$$

. K – симметричная матрица размера $[n*n]$.

Для решения задач нелинейного и квадратичного программирования широко применяются численные методы нахождения решения (приближенного решения). Например, в *MathCAD* есть функция *Minimize*(*f*, *x*, *y*, …), (*Maximize*(*f*, *x*, *y*, …)) дающая набор значений неизвестных *x*, *y*, …, минимизирующих функцию f, при ограничениях (уравнениях и неравенствах), указанных в блоке *Given*. Т. е. это фактически arg min $f(x)$.

Пример 2.2

Решить задачу

$$F(\vec{x}) = -2x_1 - 4x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 12. \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение в *MathCAD*

ORIGIN:=1

$F(x) := -2x_1 - 4x_2 + (x_1)^2 + 2(x_2)^2,$

$x_1 := 0, \quad x_2 := 0.$

Given

$x_1 + 2x_2 \le 8;$

$2x_1 - x_2 \le 12;$

$x_1 \ge 0 \;\; x_2 \ge 0;$

$xopt := \mathrm{Minimize}(F, x);$

$xopt = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \;\; F(xopt) = -3.$

2.1. Выбор инвестиционного портфеля (задача Марковица)

Рентабельность некоторого i-го актива (акция, облигация и т.п.) за определённый период

$$R_i = \frac{D_i + P_i^1 - p_i^0}{p_i^0},$$

где D_i – дивиденды или текущий доход от актива (случайная величина), p_i^0 – цена актива в начале периода (известна), P_i^1 – цена актива в конце периода (случайная величина). Т. о. R_i случайная величина и её смысл – прибыль на рубль затрат. Часто рентабельность выражают в процентах, умножая это выражение на 100%.

Пусть имеются w – средства для инвестирования, на рынке имеются n видов активов. w_i – средства, инвестированные в i-й актив. Тогда прибыль от портфеля: $R_1 w_1 + R_2 w_2 + \ldots + R_n w_n$, рентабельность портфеля $R_\pi = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i w_i}{w} = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i$,

$x_i = \frac{w_i}{w}$ – доля средств, инвестированных в i-й актив, вектор портфеля $\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{Bmatrix}$.

Г. Марковиц в 1952 г. поставил и решил задачу: найти портфель $\vec{x}\,*$, обеспечивающий ожидаемую рентабельность портфеля $MR_\pi \geq r_0$ при наименьшем возможном риске (дисперсии рентабельности портфеля $DR_\pi \to min$).

$MR_\pi = M(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i MR_i$, $a_i = MR_i$ – ожидаемая рентабельность i–го актива (можно оценить по прошлым годам, считаем известными).

$$DR_\pi = D(\vec{x}^T \vec{R}) = M(\vec{x}^T \vec{R} - M\vec{x}^T \vec{R})^2 = M(\vec{x}^T (\vec{R} - M\vec{R})) \cdot (\vec{x}^T (\vec{R} - M\vec{R}))^T =$$
$$= M(\vec{x}^T (\vec{R} - M\vec{R}) \cdot (\vec{R} - M\vec{R})^T \vec{x}) = \vec{x}^T M[(\vec{R} - M\vec{R}) \cdot (\vec{R} - M\vec{R})^T]\vec{x} = \vec{x}^T K_{\vec{R}} \vec{x},$$

где $K_{\vec{R}}$ – ковариационная матрица случайного вектора рентабельностей активов $\vec{R}$ (можно оценить по прошлым годам, считаем известной).

Т. о. получилась задача квадратичного программирования:

$$F(\vec{x}) = \vec{x}^T K_{\vec{R}} \vec{x} \to \min, \begin{cases} r_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \le 1 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,n} \end{cases}.$$

Пример 2.3

Пусть на рынке есть 3 актива с ожидаемыми рентабельностями a_1 = 11%, a_2 = 15%, a_3 = 8%.

Оценка ковариационной матрицы $K = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 & -0,7 \\ 0,5 & 2,5 & -0,3 \\ -0,7 & -0,3 & 1 \end{pmatrix}$ $[\%]^2$. Как правило, чем доходнее актив, тем больше дисперсия его доходности.

Найти оптимальный портфель, имеющий ожидаемую рентабельность не менее 11%, если доля вложения в третий актив должна быть не более 0,25.

$$F(\vec{x}) = 1,5x_1^2 + x_1x_2 - 1,4x_1x_3 + 2,5x_2^2 - 0,6x_2x_3 + x_3^2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 11 - 11x_1 - 15x_2 - 8x_3 \le 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \\ x_3 - 0,25 \le 0 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}.$$

Решение этой задачи в *MathCAD* даст $xopt = \begin{pmatrix} 0,436 \\ 0,28 \\ 0,25 \end{pmatrix}$, $\begin{matrix} F(xopt) = 0.472[\%]^2 \\ \sigma = 0,687\% \end{matrix}$.

Риск портфеля меньше, чем риск самого мало рискового актива в нём. Это эффект диверсификации – комбинирование ценных бумаг в нужных пропорциях.

Упражнение 2.1

Показать $\vec{x}^T K \vec{x} = \sum_i \sum_j K_{ij} x_i x_j$.

3. Принятие решений в условиях неопределённости и риска

Пример 3.1

Вы собираетесь пойти на работу и думаете: надеть плащ или нет. Погода – неконтролируемый, внешний фактор может быть: $\theta = 1$ – сухо, $\theta = 2$ – дождь, $\theta = 3$ – ливень. Фактор, которым вы распоряжаетесь (контролируемый), может быть: $a = 1$ – выйти без плаща, $a = 2$ – надеть плащ. $M_0 = \{1, 2\}$ – множество (чистых) стратегий.

Всевозможные сочетания этих факторов ведут к следующим вашим потерям или неудобствам: $L(a,\theta)$ – функция или матрица потерь (в условных денежных единицах). $L(a,\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, т. е. наибольшие потери 7 будут, если вы без плаща попали в ливень.

Иногда удобнее говорить не о потерях, а о выигрышах $W(a,\theta) = -L(a,\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -7 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, и тогда оперирующая сторона стремится максимизировать выигрыш.

3.1. Условия неопределённости

Никакой дополнительной информации о неконтролируемом факторе нет.

Назовём *оценкой эффективности стратегии a* величину $\underline{W}(a) = \min\limits_{\theta} W(a,\theta)$ – то есть наименьший выигрыш, который может быть при данной стратегии a (гарантированный результат).

$\underline{W}(1) = \min\limits_{\theta} W(1,\theta) = \min\limits_{\theta}(0,-5,-7) = -7;$

$\underline{W}(2) = \min\limits_{\theta}(-3,-2,-1) = -3.$

Стратегия a^* называется *оптимальной*, если она приносит наилучший гарантированный результат: $a^* = \arg\max_{a \in M_0} \underline{W}(a)$. $W(M_0) =$ $\underline{W}(a^*)$ – наилучший гарантированный результат во множестве стратегий M_0.

$a^* = \arg\max_a \begin{Bmatrix} \underline{W}(1) \\ \underline{W}(2) \end{Bmatrix} = \arg\max_a \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} = 2,$ т. е. нужно надеть плащ.

$W(M_0) = \underline{W}(2) = -3$ наилучшее, что можно гарантировать правильным выбором стратегии.

Это стандартный (весьма пессимистичный) взгляд (образ действий) называют максиминным подходом [поскольку $a^* = \arg\max_a \min_\theta W(a,\theta)$] или критерием Вальда.

Некоторые нестандартные критерии

А. Критерий оптимизма (макси-макса). В этом случае каждая стратегия характеризуется наибольшим возможным выигрышем $\overline{W}(a) = \max_\theta W(a,\theta)$ и оптимальной считается $a^* = \arg\max_a \overline{W}(a)$.

Если применить этот критерий в примере 3.1:

$\overline{W}(1) = \max_\theta W(1,\theta) = \max_\theta(0,-5,-7) = 0;$

$\overline{W}(2) = \max_\theta(-3,-2,-1) = -1;$

$a^* = \arg\max_a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$ – без плаща.

Б. Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица:

$a^* = \arg\max_a \left\{ \alpha \min_\theta W(a,\theta) + (1-\alpha) \max_\theta W(a,\theta) \right\}$, где α – доля пессимизма, $0 \le \alpha \le 1$.

Продолжение примера: пусть α = 0.5

$$a^* = \arg\max_a \left\{ 0,5 \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \arg\max_a \begin{pmatrix} -3,5 \\ -2 \end{pmatrix} = 2$$ – надеть плащ.

3.2. Условия риска (критерий Байеса – Лапласа)

В этом случае внешний фактор θ считается случайной величиной Θ, имеющей известное распределение $p_{\Theta}(\theta)$ – плотность распределения или закон, и оценкой эффективности стратегии *a* называют математическое ожидание выигрыша при данной стратегии

$$EMV(a) = \mathrm{M}W(a,\Theta) = \begin{cases} \sum\limits_{\theta} W(a,\theta)p_{\theta} \\ \int W(a,\theta)p_{\Theta}(\theta)d\theta \end{cases},$$

в дискретном и непрерывном случае соответственно. *EMV – expected monetary value*. И тогда, естественно, $a^* = \arg\max\limits_{a} EMV(a)$.

Пример 3.1 (продолжение)

Считаем известным распределение погоды

θ	1	2	3
$p_{\theta}\cdot 100\%$	60	30	10

$EMV(1) = W(1,1)p_1 + W(1,2)p_2 + W(1,3)p_3 = 0\cdot 0.6 + (-5)\cdot 0,3 + (-7)\cdot 0,1 = -2,2;$
$EMV(2) = -3\cdot 0,6 + (-2)\cdot 0,3 + (-1)\cdot 0,1 = -2,5;$

$a^* = \arg\max\limits_{a}\begin{pmatrix} -2,2 \\ -2,5 \end{pmatrix} = 1$ – без плаща. Сравним это с максиминным решением *a** = 2 – надеть плащ. При том решении средний выигрыш меньше (-2,5), но хуже, чем наилучший гарантированный результат (-3) не будет. При *a** = 1 средний выигрыш лучше, но можно и сильно промокнуть (-7).

Ожидаемая ценность точной информации (EVPI)

Пример 3.1 (продолжение)

Пусть предлагается услуга – утром перед выходом из дома вам сообщать, какая на улице погода (точная информация). СКакова максимальная цена услуги накануне вечером?

Если проинформируют, что сухо, то ясно – пойдёте без плаща и $w = 0$, если дождь, то в плаще и $w = -2$, если ливень, то в плаще и $w = -1$. А с какими вероятностями так сообщат – с теми, как оно бывает. То есть ожидаемый оптимальный выигрыш при покупке информации $0 \cdot 0,6 + (-2) \cdot 0,3 + (-1) \cdot 0,1 = -0,7$.

Разность: ожидаемый оптимальный выигрыш (при покупке информации) – оптимальный ожидаемый выигрыш (в условиях риска) и составляет ожидаемую ценность информации (*EVPI* – *expected value of perfect information*) $EVPI = -0,7 - (-2,2) = 1,5$. Вплоть до такой цены можно заплатить за информацию.

Очевидно $EVPI = \mathrm{M} \max\limits_{a} W(a, \Theta) - \max\limits_{a} \mathrm{M} W(a, \Theta)$.

О статистических решающих функциях, когда ЛПР перед принятием решения разрешается проведение эксперимента, см., например, [3].

Пример 3.2

Фирма продаёт скоропортящийся продукт. Нереализованный в данном периоде продукт не может быть продан в следующем периоде. k_1 – себестоимость и затраты на хранение пропавшего товара – издержки излишка (на 1 кг). k_2 – потеря прибыли из-за неудовлетворённого спроса – издержки недостатка (на 1 кг). О предстоящем случайном спросе Θ косвенно говорит x - инфляция в предыдущем периоде (в %). Найти оптимальный запас a (в тоннах) по байесовскому решающему правилу.

Функция потерь

$$L(a, \theta) = \begin{cases} k_1(a - \theta), \text{ при } a \geq \theta, \\ k_2(\theta - a), \text{ при } a < \theta. \end{cases}$$

По теореме (байесовский принцип) байесовская решающая функция имеет вид:

$$a_B = d_B(x) = \arg\min_{a} EMV(a \mid x),$$

где $EMV(a \mid x)$ – ожидаемая денежная ценность действия a при известном x.

$$EMV(a \mid x) = M[L(a,\Theta) \mid x] = \int L(a,\theta) p(\theta \mid x) d\theta, \tag{14}$$

Здесь $p(\theta \mid x)$ – апостериорное распределение состояния природы, которое будем считать известным, т. к. величина спроса изучалось при различных x.

Подставим функцию потерь в (14):

$$EMV(a \mid x) = k_1 \int_0^a (a-\theta) p(\theta \mid x) d\theta + k_2 \int_a^\infty (\theta - a) p(\theta \mid x) d\theta =$$

$$= k_1 [aF(a \mid x) - \int_0^a \theta p(\theta \mid x) d\theta] + k_2 \{\mathrm{M}(\Theta \mid x) - \int_0^a \theta p(\theta \mid x) d\theta -$$

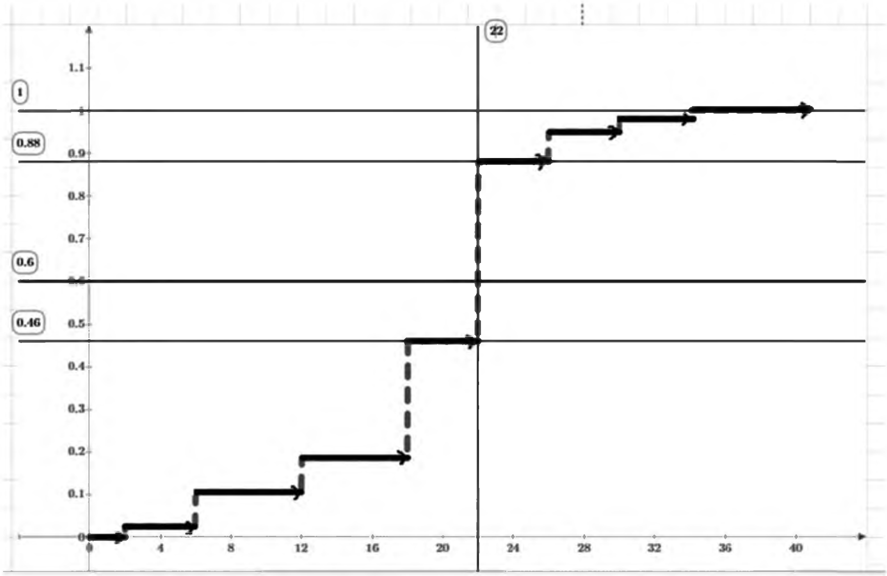
$$- a[1 - F(a \mid x)]\} =$$

$$= (k_1 + k_2) aF(a \mid x) + k_2 \mathrm{M}(\Theta \mid x) - k_2 a - (k_1 + k_2) \int_0^a \theta p(\theta \mid x) d\theta.$$

Минимизируем по a: $\dfrac{\partial EMV(a \mid x)}{\partial a} = (k_1 + k_2) F(a \mid x) - k_2 = 0$, откуда

$F(a_B \mid x) = \dfrac{k_2}{(k_1 + k_2)}$. Т. о. оптимальный запас a_B есть квантиль порядка $\dfrac{k_2}{(k_1 + k_2)}$ апостериорного распределения спроса.

Возьмём данные варианта 28 из задачи 8.7. $k_1 = 1$, $k_2 = 1.5$, $x = 1.4$. По группированным данным строим эмпирическую функцию апостериорного распределения спроса.



$\dfrac{k_2}{(k_1+k_2)}$ = 0.6. Квантиль порядка p распределения есть то минимальное значение аргумента функции распределения, при котором она $\geq p$. Т. о. квантиль порядка 0.6 равна 22 тоннам. Это и есть оптимальный запас.

3.3. Антагонистические игры

Антагонистические игры – игра двух лиц с нулевой суммой, т.е. выигрыш одного равен проигрышу другого.

Матричная игра задаётся матрицей $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$,

где $M_0=\{1,2,...,m\}$, $N_0=\{1,2,...,n\}$ – соответственно множества чистых стратегий первого и второго игроков, a_{ij} имеют смысл выигрыша первого игрока (проигрыша второго) при выборе игроками чистых стратегий i и j. Процесс игры: игрок 1 фиксирует номер строки i, игрок 2 одновременно фиксирует номер столбца j, после чего 1-й игрок получает от 2-го сумму a_{ij}.

Применяя принцип наилучшего гарантированного результата (как против природы) 1-й игрок выберет стратегию $i_* = \arg\max_i \min_j a_{ij}$.

$$\max_i \min_j a_{ij} - \tag{15}$$

– наилучший гарантированный результат 1-го игрока (меньше этого он не получит). Критерий Вальда применительно ко 2-му игроку: при любом моём j я проиграю в худшем случае $\max_i a_{ij}$, тогда я выберу j, чтобы этот максимум был наименьшим: $j_* = \arg\min_j \max_i a_{ij}$.

$$\min_j \max_i a_{ij} - \tag{16}$$

– наилучший гарантированный результат 2-го игрока (больше этого он не проиграет). Поэтому при разумных действиях игроков выигрыш 1-го лежит между значениями (15) и (16).

Пример 3.3

Саша и Лиза условились встретиться зимой у кинотеатра. Если оба приходят вовремя (рано), то выигрыш Саши +2, если Саша рано, а Лиза поздно, ему приходится мёрзнуть и свой выигрыш при этом он оценивает в 0. Если Лиза рано он поздно, то хуже всего -2. Если оба опаздывают, то +1.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Оптимальная стратегия Саши $i_* = \arg\max_i \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 1$ (ходить рано, наилучший гарантированный результат 0). У Лизы $j_* = \arg\min_j \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$ (ходить поздно, наилучший гарантированный результат 1 – больше она не проиграет). Итак, Саша ходит рано, Лиза поздно и проигрывает всегда 0, хотя была готова к 1.

Если величины (15) и (16) равны, $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v$, игра называется *вполне определённой* и выигрыш 1-го игрока v называется ценой игры и $v = a_{i_* j_*}$. Нахождение тройки (i_*, j_*, v) называется решением игры.

Элемент матрицы $a_{i_* j_*}$ называется седловой точкой, если он обладает следующими свойствами: является минимальным элементом строки и в то же время – максимальным элементом столбца.

Пример 3.4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \ a_{22} = 2 \ - \textit{седловая точка}.$$

Если игра имеет седловую точку, то её решение $i_*, j_*, a_{i_* j_*}$. Действительно, если 1-й игрок выберет i^*, то его выигрыш составит не менее $a_{i_* j_*}$ (все остальные элементы строки ещё больше). Если 1-й игрок выберет строку отличную от i^*, то он не может гарантировать себе $a_{i_* j_*}$, т.к. 2-й игрок может выбрать j^*. Поэтому 1-й выбирает i^*, аналогично 2-й – j^*.

Пример 3.3 (продолжение)

Седловой точки нет. Саша, видя, что Лиза приходит всё время поздно, решил сам приходить поздно и выигрывать по 1 (вместо 0). Теперь Лизе стало хуже, и она неожиданно пришла рано и Саша выиграл -2. Тогда он решил прибегнуть к вероятностной (смешанной) стратегии.

Смешанные стратегии игроков в матричной игре с матрицей А задаются векторами $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_m \end{pmatrix}$ *и* $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}$, где p_i и q_j – вероятности выбора чистых стратегий i и j. $p_i, q_j \geq 0, \sum_i p_i = 1, \sum_j q_j = 1$.

Обозначим $A(\vec{p}, j) = \sum_i^m a_{ij} p_i$ – усреднённый выигрыш первого игрока при применении им смешанной стратегии $\vec{p}$, в то время как второй игрок придерживается постоянно чистой стратегии j.

$A(i,\vec{q}) = \sum_{j}^{n} a_{ij} q_j$ – усреднённый выигрыш первого игрока при применении им чистой стратегии i, когда второй придерживается смешанной стратегии $\vec{q}$.

$A(\vec{p},\vec{q}) = \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} a_{ij} p_i q_j$ – усреднённый выигрыш первого игрока, при применении обоими смешанных стратегий.

И теперь опять максиминный подход, но уже к выбору смешанных стратегий

$$\begin{aligned} &\vec{p}^* = \arg\max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} A(\vec{p},\vec{q}) \\ &\vec{q}^* = \arg\min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} A(\vec{p},\vec{q}) \end{aligned}.$$

В отличие от чистых стратегий имеет место следующая теорема.

Теорема Неймана (теорема о минимаксе)

Любая матричная игра имеет седловую точку в смешанных стратегиях: существует пара $\vec{p}^*, \vec{q}^*$, для которой

$$A(\vec{p}^*, \vec{q}^*) = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} A(\vec{p},\vec{q}) = \min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} A(\vec{p},\vec{q}) = v.$$

Тройка $(\vec{p}^*, \vec{q}^*, v)$ – решение игры в смешанных стратегиях.

Доказательство

Очевидно, если матричная игра с матрицей А имела решение $(\vec{p}^*, \vec{q}^*, v)$ в смешанных стратегиях, то матричная игра с платёжной матрицей $A' = (a_{ij} + c)$ будет иметь решение $(\vec{p}^*, \vec{q}^*, v + c)$. Поэтому, всегда можно считать $a_{ij} > 0$.

Покажем эквивалентность игры задаче линейного программирования.

Первый игрок ищет свою оптимальную стратегию: $\vec{p}^* = \arg\max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} A(\vec{p},\vec{q})$.

Обозначим $\min_{\vec{q}} A(\vec{p},\vec{q}) = \underline{v}(\vec{p})$, тогда

$$\underline{v}(\vec{p}) \to \max_{\vec{p}} \text{ при ограничениях } \begin{cases} A(\vec{p}, j) \ge \underline{v}(\vec{p}) \\ \sum_i p_i = 1,\ p_i \ge 0 \end{cases}.$$

Первое следует из того, что отдельное всегда не больше минимального.

Поделим всё на $\underline{v}(\vec{p}) > 0$.

$$\frac{1}{\underline{v}(\vec{p})} \to \min_{\vec{p}} \quad \begin{cases} \sum_i^m a_{ij} \frac{p_i}{\underline{v}(\vec{p})} \ge 1 \\ \sum_i^m \frac{p_i}{\underline{v}(\vec{p})} = \frac{1}{\underline{v}(\vec{p})}, \ \frac{p_i}{\underline{v}(\vec{p})} \ge 0 \end{cases}$$

. Обозначим $x_i = \frac{p_i}{\underline{v}(\vec{p})}$, получим задачу линейного программирования $\sum_i^m x_i \to \min$, $\begin{cases} \sum_i^m a_{ij} x_i \ge 1 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$. Решая ее, находим $\{x_i *\}, \sum_i^m x_i * = \frac{1}{\underline{v}^{\max}}$. Затем $p_i * = x_i * \underline{v}^{\max}$.

Аналогичные преобразования для второго игрока приведут к

$\sum_j^n y_j \to \max$, $\begin{cases} \sum_j^n a_{ij} y_j \le 1 \\ y_j \ge 0 \end{cases}$ – двойственной задаче линейного программирования.

Из теории двойственности $\frac{1}{\underline{v}^{\max}} = \sum_i^m x_i * = \sum_j^n y_j * = \frac{1}{\overline{v}^{\min}}$, т.е. $\underline{v}^{\max} = \overline{v}^{\min} = v$ что доказывает теорему Неймана.

Как всякая седловая точка, $(\vec{p}*, \vec{q}*)$ обладает *свойством устойчивости* $A(\vec{p}, \vec{q}^{\,*}) \le v \le A(\vec{p}^{\,*}, \vec{q}^{\,*}) \le A(\vec{p}^{\,*}, \vec{q})$, для любых $\vec{p}, \vec{q}$, то есть никому из игроков не выгодно в своём выборе стратегий отклоняться от неё. Более того, если один из участников игры придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то ожидаемый выигрыш остаётся неизменным и равным v, независимо от характера действий другого участника, в пределах его стратегий, входящих в его оптимальную смешанную стратегию.

Отсюда следует, что в игре против природы нужно придерживаться $\vec{p}*$.

Пример 3.3 (продолжение)

$$A' = A + 3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ \begin{cases} 5x_1 + 1x_2 \ge 1 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 1 \end{cases}\ \vec{x}^* = \begin{pmatrix} 3/17 \\ 2/17 \end{pmatrix} \frac{1}{v'} = x_1^* + x_2^* = 5/17, v' = 17/5$$
$$x_1 + x_2 \to \min$$

$\vec{p}^* = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}, v = v' - 3 = 0.4$. Оптимальная смешанная стратегия Саши: с вероятностью 3/5 приходить рано и с вероятностью 2/5 приходить поздно. При этом средний за поход выигрыш будет 0.4.

Оптимальную смешанную стратегию Лизы можно найти через условия дополняющей не жёсткости: $\begin{cases} 5y_1^* + 3y_2^* = 1 \\ 1y_1^* + 4y_2^* = 1 \end{cases}\ \vec{y}^* = \begin{pmatrix} 4/17 \\ 1/17 \end{pmatrix}\ \vec{q}^* = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$.

3.4. Приближённое решение матричной игры итеративным методом Брауна – Робинсона

Пример 3.5

Платёжная матрица $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

На первом шаге (фиктивном разыгрывании) $k = 1$, игроки выбирают стратегии произвольно. Пусть $i^1 = 1$, $j^1 = 1$. Вектора чисел использованных стратегий после $k = 1$ шагов $\vec{\xi}^1 = (1,0,0)^T$, $\vec{\eta}^1 = (1,0,0)^T$. На втором и последующих шагах k = 2,3,… игрок 1 выбирает стратегию, максимизирующую его выигрыш против смешанной стратегии 2-го игрока, оценённой по всем предшествующим шагам $\vec{q}^{k-1} = \dfrac{\vec{\eta}^{k-1}}{k-1}$:

$$i^k = \arg\max_i \sum_j a_{ij} q_j^{k-1} = \arg\max_i \sum_j a_{ij} \eta_j^{k-1} = \arg\max_i A\vec{\eta}^{k-1} .$$

При этом $\overline{v}^{k-1} = \sum_j a_{i^k j} q_j^{k-1}$ –больше этого 2-й игрок не проиграет в среднем.

Аналогично, 2-й игрок выбирает $j^k = \arg\min_j \sum_i a_{ij} p_j^{k-1} = \arg\min_j \vec{\xi}^{k-1T} A$. При этом $\underline{v}^{k-1}$ – меньше этого 1-й игрок не выиграет в среднем. Пересчёт чисел использованных стратегий перед следующим шагом $\vec{\xi}^k = \vec{\xi}^{k-1} + (0,...,\underset{i^k}{1},...,0)^T$, для $\vec{\eta}^k$ – аналогично.

$$k = 2.\ i^2 = \arg\max_i A\vec{\eta}^1 = \arg\max_i \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \arg\max_i \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,\ \overline{v}^1 = 8,$$

$$\vec{\xi}^2 = \vec{\xi}^1 + (1,0,0)^T = (2,0,0)^T.$$

$$j^2 = \arg\min_j \vec{\xi}^{1T} A = \arg\min_j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} = 3,\ \underline{v}^1 = 2,$$

$$\vec{\eta}^2 = \vec{\eta}^1 + (0,0,1)^T = (1,0,1)^T$$ и т. д.

После 8 шагов (итераций) оценки смешанных стратегий игроков $\vec{p}^8 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}^T$, $\vec{q}^8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{4}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}^T$. Цена игры заключена в отрезке $[\max_k \underline{v}^k, \min_k \overline{v}^k] = [3.875, 5]$.

Кстати, точное решение $\left\langle \begin{pmatrix} \frac{20}{45} & \frac{11}{45} & \frac{14}{45} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{14}{45} & \frac{11}{45} & \frac{20}{45} \end{pmatrix}^T \frac{196}{45} \right\rangle$.

3.5. Физическая смесь стратегий. Распределение капиталовложений на основании игровых критериев

Полученное оптимальное решение $\vec{p}^* = \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ \ldots \\ p_m^* \end{pmatrix}$ очевидно легко применить в задачах тактических, характеризующихся многократным выбором способа действий. А если решение принимается только 1 раз?

Пример 3.6

Вы собираетесь организовать транспортную фирму и решаете, какие автомобили закупить?

Тип авто	Вид груза				
	1 (лёгкий)	2	3	4	5 (тяжелый)
КамАз	200	400	600	400	700
ЗИЛ	300	400	600	500	800
Газель	400	500	600	500	800
ИЖ-2715	700	300	500	200	100

В таблице указана прибыль от перевозки разного вида грузов на разных автомобилях. Если подвернётся тяжёлый груз, то хорошо бы иметь КамАз или ЗИЛ, лёгкий – Газель или ИЖ.

Рассмотрим это как игру. Очевидно, матрицу можно упростить, откинув заведомо неиспользуемые строки и столбцы.

Тип авто	Вид груза		
	1 (лёгкий)	4	5 (тяжелый)
Газель	400	500	800
ИЖ-2715	700	200	100

Решая эту игру, получим $\vec{p}^* = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}, v = 450$. Но вы не можете начинать каждое новое утро то с ИЖ, то с Газелями (в 5 раз чаще). Вместо этого вы закупаете и ИЖ, и Газели в соотношении 5:1, то есть смешали стратегии не во времени, а физически.

Физическая смесь стратегий – реализация сразу нескольких технологических или конструкторских решений в пропорциях, которые вытекают из исследования игровой модели.

Упражнения

Упражнение 3.1

В операции с критерием эффективности $W(a,\theta)$:

1	2	3	0
1	3	2	4
3	1	3	0
1	0	5	1
0	2	2	3

указать множество стратегий M_0, найти оценки эффективности всех стратегий, оптимальные стратегии по критерию Вальда, наилучший гарантированный результат в M_0. Найти оптимальные стратегии по критериям макси-макса, Гурвица (с $\alpha = 0.5$).

Упражнение 3.2

Автомобильный завод получает реле поворота от двух поставщиков: *A* и *B*. Качество этих изделий характеризуется данными в таблице.

Процент брака	Вероятность для поставщика	
	A	*B*
1	0.7	0.4
2	0.1	0.3
3	0.09	0.15
4	0.07	0.1
5	0.04	0.05

Полные затраты, связанные с ремонтом одного бракованного реле, составляют 5 руб. Реле поступают партиями по 20 000 шт. Поскольку качество изделий у поставщика *B* хуже, он уступает всю партию на 500 руб. дешевле. Какого поставщика следует выбрать? Каков ожидаемый выигрыш против противоположного решения?

Упражнение 3.3

Скорость движения в автомобильном туннеле v не превышает 50 км/ч и связана с плотностью потока (количеством машин на километр дороги) p следующим эмпирическим соотношением: $p = (60 - v^* \theta)/ \theta$, где θ – неконтролируемый внешний фактор, который в любой момент определяется соотношением легковых и грузовых машин, проходящих через туннель. Известно, что $\theta \in [0{,}5;1]$. Регулировка движения в туннеле производится выбором скорости движения v. Цель операции состоит в увеличении потока машин W, т.е. количества машин, выходящих из туннеля за 1 ч.

а. Указать множество стратегий M_0, найти оценки эффективности всех стратегий, оптимальные стратегии по критерию Вальда, наилучший гарантированный результат в M_0. Найти оптимальные стратегии по критериям макси-макса, Гурвица (с $\alpha = 0{,}5$).

b. Считая θ случайной величиной ~ $U(0{,}5;1)$ найти оптимальную стратегию по критерию *EMV* и соответствующий ожидаемый результат. Найти *EVPI* . Как использовать точную информацию?

Упражнение 3.4

Фирма ведёт строительство объекта. Зависимость дополнительной прибыли фирмы от времени строительства приведена в таблице. Там же приведены вероятности уложиться в соответствующие сроки.

Время строительства, мес.	3	4	5	6	7
Вероятность		2/27	8/27	14/27	3/27
Дополнительная прибыль, тыс. руб	120	110	100	50	0

В распоряжении фирмы имеется резерв, ввод которого ускоряет всё строительство на 1 мес., но потребует дополнительных расходов в 20 тыс. руб.

Следует ли использовать резерв, если цель фирмы – увеличение по мере возможности чистой дополнительной прибыли (т. е. дополнительной прибыли за вычетом расходов в случае использования резерва)? Найти *EVPI.* Сравнить с максиминным подходом.

Упражнение 3.5

Директор лицея, обучение в котором осуществляется на платной основе, решает, следует ли расширять здание лицея на 250 мест, 50 мест или не проводить строительных работ вообще. Если население небольшого города, в котором организован платный лицей, будет расти, то большая реконструкция могла бы принести прибыль 250 тыс. руб. в год, незначительное расширение учебных помещений могло бы приносить 90 тыс. руб. прибыли. Если население города увеличиваться не будет, то крупное расширение обойдется лицею в 120 тыс.

руб. убытка, а малое – 45 тыс. руб. Однако информация о том, как будет изменяться население города, отсутствует. Определите лучшую альтернативу, используя критерий Вальда.

Пусть при тех же исходных данных государственная статистическая служба предоставила информацию об изменении численности населения: вероятность роста численности населения составляет 0,7; вероятность того, что численность населения останется неизменной или будет уменьшаться, равна 0,3. Определите наилучшее решение, используя критерий *EMV*. Какова ожидаемая ценность дополнительной информации государственной статистической службы?

Упражнение 3.6

Для критерия эффективности $W(x, y)$

4	12
16	2
12	8

найти диапазоны вероятности p_2, для которых каждая стратегия оптимальна.

Упражнение 3.7

Поставщик должен поставить потребителю партию изделий объёмом 20 шт. По договору поставщик обязуется заменять дефектные изделия, выявленные в процессе эксплуатации партии за свой счёт. Издержки замены одного дефектного изделия 2000 у.е. Поэтому партию с большой долей дефектных изделий поставщик пропускать не должен (надо браковать). Решающее правило (принять – браковать) – выборочный контроль 2 шт. из партии с приёмным числом 0. Издержки проверки одного изделия 180 у.е. Считать распределение числа дефектных изделий в выборке биномиальным. В отвергнутой партии все изделия проверяются. Выявленные дефектные изделия (в принятой партии – в выборке, в отвергнутой – во всей партии) заменяются на годные, это не даёт дополнительных издержек. Найти риск от применения этого решающего правила при доле дефектных изделий в партии 0,5.

Каков максимальный риск этого правила (что нужно задать, чтобы ответить на этот вопрос)? Пусть возможны только θ = 0; 0,5; 1.

$$r_m(d_0) = \max_{\theta} R(d_0, \theta) = \max_{\theta}\{360, 7290, 3600\} = 7290.$$

Найти минимаксное решающее правило (что нужно задать, чтобы ответить на этот вопрос). Пусть N остаётся 2.

Упражнение 3.8

Объяснить, почему 2 – й игрок должен выбирать столбец, где находится седловая точка в чистых стратегиях.

Упражнение 3.9

Найти оптимальные смешанные стратегии $\vec{p}\,*$ и $\vec{q}\,*$ в примере 3.6. Какова цена игры и её смысл (т.е. это средний выигрыш или наименьший средний выигрыш).

Упражнение 3.10

Проверить свойство устойчивости в примере 3.3. Найти средний выигрыш Саши, если Лиза: а) всегда опаздывает; б) всегда приходит рано.

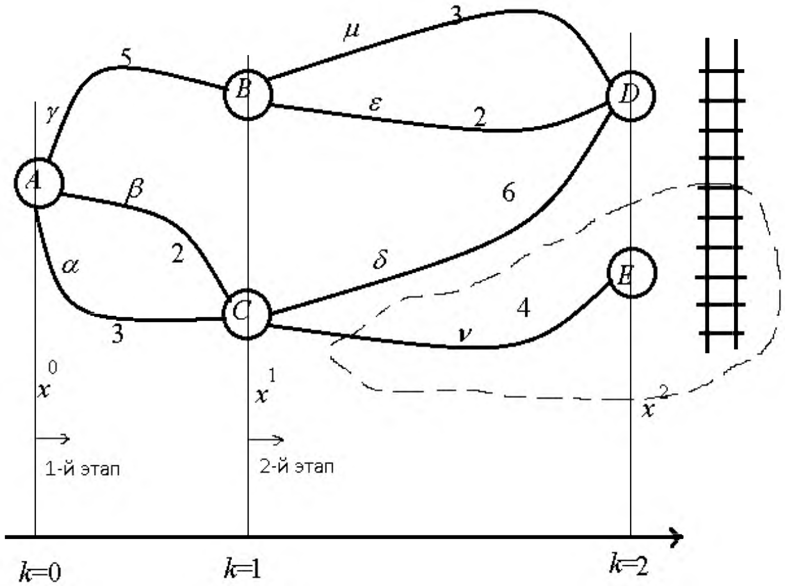
Упражнение 3.11

Задача поиска – массовый количественный случай. Требуется определить среднее значение величины, имеющей в партии изделий нормальное распределение с σ = 0.1 мм. Функция цены ошибки определения – линейна по ошибке и симметрична, объём ресурсов фиксирован = 1000 у. е. Есть 2 прибора: со стоимостью одного измерения 100 у. е., погрешностью 0.1 мм и второй, с характеристиками 200 у. е. и 0.05 мм. Каким прибором воспользоваться, и каков должен быть объём выборки? [1, гл. 14].

4. Динамическое программирование

Пример 4.1

Пусть туристам нужно добраться из пункта A в пункт D (к железной дороге) за K (= 2) дня (перехода, этапа) кратчайшим путём.



Обозначим x^k – состояние в момент времени k (k = 0, 1, 2 = K), т. е. где они. u^k – управление (принятое решение по какой дороге пойти), применённое на этапе k, $w_k(x^{k-1},u^k)$ – путь пройдённый на k-м этапе при этом. Например, $w_2(B,\varepsilon)=2$. Тогда суммарный путь $\sum_{k=1}^{2} w_k(x^{k-1},u^k) \to \min\limits_{\{u^1,u^2\}}$, т.е. надо решить, какие лучше применить управления?

Следует ли сразу взять $u^1 = \beta$ (с кратчайшим путём)? Нет, это было бы недальновидно! Попробуем анализировать с конца. Так как в итоговую точку можно прийти на последнем этапе из разных точек, то последний участок нужно выбрать покороче, но не столько сам по себе, сколько вместе с тем путём, который по минимуму придётся пройти, чтобы попасть в стартовую точку последнего этапа.

Обозначим $z_k(x^k)$ – минимальное значение целевой функции (пути) для достижения состояния x^k. Тогда $z_k(x^k) = \min\limits_{u^k}\{w_k(x^{k-1}, u^k) + z_{k-1}(x^{k-1})\}$, при $k = K$ это даст минимум итогового пути. Но в каждую точку x^{k-1} можно попасть тоже путём нескольких управлений из нескольких точек, поэтому $z_{k-1}(x^{k-1}) = \min\limits_{u^{k-1}}\{w_{k-1}(x^{k-2}, u^{k-1}) + z_{k-2}(x^{k-2})\}$ и т. д. до $z_1(x^1) = \min\limits_{u^1}\{w_1(x^0, u^1)\}$, т.к. $z_0(x^0) = 0$. Т. о.

$$\begin{cases} z_0(x^0) = 0, \\ z_k(x^k) = \min\limits_{u^k}\{w_k(x^{k-1}, u^k) + z_{k-1}(x^{k-1})\}, k = 1, 2, ..., K \end{cases} \tag{17}$$

Пример 4.1(продолжение)

$$z_1(x^1) = \min_{u^1 \in \{\alpha, \beta, \gamma\}} w_1(x^0, u^1) = \begin{cases} x^1 = C, \min\limits_{\alpha, \underline{\beta}}\{3, 2\} = 2 \\ x^1 = B, \min\limits_{\underline{\gamma}}\{5\} = 5 \end{cases}.$$

Или эти же вычисления в виде таблицы

x^1	C		B
u^1	α	$\underline{\beta}$	$\underline{\gamma}$
x^0	A	A	A
$w_1(x^0, u^1)$	3	$\underline{2}$	$\underline{5}$
$z_1(x^1)$	2		5

Обозначим $u^k(x^k)$ – выявленное условно-оптимальное управление на k-м этапе (при условии, что хотим попасть в состояние x^k). В нашем примере это подчёркнутые управления во второй строке.

Итоги этой таблицы заносим в основную таблицу:

x^k	1-й этап		2-й этап	
	$z_1(x^1)$	$u^1(x^1)$	$z_2(x^2)$	$u^2(x^2)$
C	2	β	–	–
B	5	γ	–	–
D	–	–	7	ε
E	–	–	6	ν

Теперь второй (последний) этап: $z_2(x^2) = \min\limits_{u^2}\{w_2(x^1, u^2) + z_1(x^1)\}$

x^2	D			E
u^2	δ	<u>ε</u>	μ	<u>ν</u>
x^1	C	B	B	C
$w_2(x^1, u^2)$	6	2	3	4
$z_1(x^1)$	2	5	5	2
Σ	8	<u>7</u>	8	<u>6</u>
$z_2(x^2)$	7			6

Итог в основной таблице. Видим, что минимально пункта $x^2 = D$ можно достичь через 7 км. Осталось обратным ходом проследить, как это удалось: $u_*^2 = u^2(x_*^2 = D) = \varepsilon \Rightarrow$ значит $x_*^1 = B \Rightarrow u_*^1 = u^1(x_*^1 = B) = \gamma \Rightarrow x_*^0 = A$.

Ответ

k	0	1	2
x_*^k	A	B	D
u_*^k		γ	ε
$z_k(x_*^k)$	0	5	7

Иногда конечное состояние не задано, а указано только множество его возможных значений Ω^K. Например, пусть ещё возможен пункт E на железной дороге. Чтобы и его взять в рассмотрение, переделаем конец расчёта (см. затемнённый столбец и строку). Ясно, $x_*^2 = \arg\min\limits_{x^2\in\Omega^K} z_2(x^2) = \arg\min\limits_{x^2=D,E}\{7,6\} = E$, и $z_2(x_*^2 = E) = 6$.

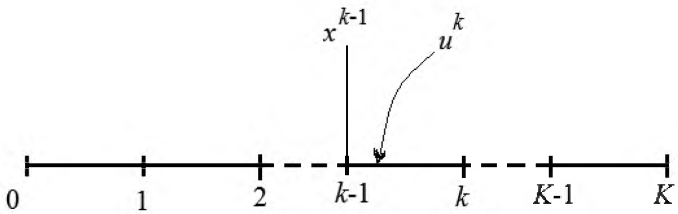
$u_*^2 = u^2(x_*^2 = E) = \nu \Rightarrow$ значит $x_*^1 = C \Rightarrow u_*^1 = u^1(x_*^1 = C) = \beta \Rightarrow x_*^0 = A$.

Ответ

k	0	1	2
x_*^k	A	C	E
u_*^k	–	β	ν
$z_k(x_*^k)$	0	2	6

Уравнение Р. Беллмана

Есть некоторая система (например, предприятие) и дискретные моменты времени (начала очередных финансовых годов k = 0, 1, …, K).



Состояние системы в каждый из этих моментов характеризуется некоторой величиной x^k (или набором величин – вектором состояния $\vec{x}^k$). На этапах k = 1, 2, …, K вы должны применять управления u^k (или векторные $\vec{u}^k$), при этом несёте затраты (потери) $w_k(x^{k-1}, u^k)$, зависящие от наличного состояния и выбранного управления, а система переходит в новое состояние $x^k = \varphi_k(x^{k-1}, u^k)$.

Задача динамического программирования: найти оптимальный набор управлений $\{u_*^1, u_*^2, ..., u_*^K\}$, обеспечивающий нужное конечное состояние x^K с минимумом суммарных потерь $z_K(x^K) = \min\limits_{\{u^1, u^2, ..., u^K\}} \sum\limits_{k=1}^{K} w_k(x^{k-1}, u^k)$. Решение уже найдено, это рекуррентное уравнение Р. Беллмана (17) (в прямой форме). По нему находится последовательность функций $\{u^k(x^k)\}$, дающих условно-оптимальное управление для каждого состояния x^k (см. основная таблица). Затем, обратный ход:

- $k = K,\ x_*^k = x^K$(известное);
- находим оптимальное управление u_*^k, ведущее в известное оптимальное состояние x_*^k: $u_*^k = u^k(x_*^k)$;
- находим оптимальное состояние предыдущего момента: $x_*^{k-1} = \varphi_k^{-1}(x_*^k, u_*^k)$;
- $k - 1 = 0$? если да – *Stop*, известны все оптимальные управления $u_*^K, u_*^{K-1}, ..., u_*^1$, оптимальная траектории $x_*^K, x_*^{K-1}, ..., x_*^0$, и динамика критерия качества (целевой функции) $z_K(x_*^K), z_{K-1}(x_*^{K-1}), ..., z_0(x_*^0)$;
- если нет, $k = k - 1$ и возврат к п. 2.

4.1. Распределение ресурсов

Пока мы рассматривали чисто динамические задачи: были этапы во времени, система изменяла состояние и т. д. Но можно решать и статические задачи. Пусть есть K предприятий и количество R ресурса, который нужно распределить между ними. $z_k(x^k)$ – максимальная прибыль, получаемая от распределения между первыми k предприятиями суммы x^k. u^k – k-е управление (сумма выделяемая k-му предприятию, при этом оно даёт прибыль $w_k(u^k)$. Цель $z_K(x^K) = \max\limits_{\{u^1,u^2,...,u^K\}} \sum\limits_{k=1}^{K} w_k(u^k)$.

Это приводит к уравнению Беллмана

$$\begin{cases} z_0(x^0) = 0, \\ z_k(x^k) = \max\limits_{0 \le u^k \le x^k} \{w_k(u^k) + z_{k-1}(x^{k-1})\}, k = 1,2,...,K. \\ x^K \le R \end{cases} \tag{18}$$

Пример 4.2

Распределить бюджет R между тремя предприятиями с выходом прибыли:

$w_1(u^1) = \ln(1+u^1)$ $w_2(u^2) = u^2$ $w_3(u^3) = (u^3)^3$.

$z(x^1) = \max\limits_{0 \le u^1 \le x^1} (\ln(1+u^1)) = \ln(1+x^1)$ $u^1(x^1) = x^1$.

$z_2(x^2) = \max\limits_{0 \le u^2 \le x^2} (u^2 + z_1(x^1 = x^2 - u^2)) = \max\limits_{0 \le u^2 \le x^2} (u^2 + \ln(1+x^2-u^2)) = x^2$ (видно через производную, что точка максимума при $u^2 = x^2$) $u^2(x^2) = x^2$.

$z_3(x^3) = \max\limits_{0 \le u^3 \le x^3} ((u^3)^3 + z_2(x^2 = x^3 - u^3)) = \max\limits_{0 \le u^3 \le x^3} ((u^3)^3 + x^3 - u^3) =$

$$= \begin{cases} x^3 \le 1, x^3; u^3(x^3) = 0 \\ x^3 > 1, (x^3)^3; u^3(x^3) = x^3 \end{cases}.$$

Пусть R = 0,5. Ясно, что $x_*^3 = R = 0,5$.

$u_*^3 = u^3(0,5) = 0 \Rightarrow x_*^2 = 0.5 - 0 = 0,5 \Rightarrow$

$\Rightarrow u_*^2 = u^2(0,5) = 0,5 \Rightarrow x_*^1 = 0.5 - 0.5 = 0 \Rightarrow u_*^1 = x_*^1 = 0$

k	0	1	2	3
x_*^k	0	0	0.5	0.5
u_*^k	–	0	0.5	0
$z_k(x_*^k)$	–	0	0.5	0.5

То есть всё второму.

Пусть $R = 2$. Ясно, что $x_*^3 = R = 2$.

$u_*^3 = u^3(2) = 2 \Rightarrow x_*^2 = 2 - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u_*^2 = x_*^2 = 0 \Rightarrow x_*^1 = 0 - 0 = 0 \Rightarrow u_*^1 = x_*^1 = 0$

k	0	1	2	3
x_*^k	0	0	0	2
u_*^k	–	0	0	2
$z_k(x_*^k)$	–	0	0	8

То есть всё третьему.

4.2. Задача о замене оборудования

Пример 4.3

В начальный момент времени $k = 0$ на предприятии установлено новое оборудование. Зависимость его производительности и затрат на содержание и ремонт от времени эксплуатации приведена в таблице.

Возраст оборудования t	0	1	2	3	4	5
Годовой выпуск продукции $r(t)$, тыс. руб.	80	75	65	60	60	55
Ежегодные затраты $c(t)$, тыс. руб.	20	25	30	35	45	55

Зная, что затраты связанные с приобретением и установкой такого же нового оборудования составляют $p = 40$ тыс. руб., а заменяемое оборудование списывается, составить такой план замены оборудования в течение 5 лет, при котором общая прибыль за данный период максимальна.

Состояние системы (предприятия) на момент начала очередного года $k = 0$, 1, 2, 3, 4, когда должно приниматься решение о замене или не замене оборудования (управление), характеризуется одной величиной x^k – возраст оборудования. Конечное состояние может быть различным и чтобы рассмотреть сразу все возможности, удобно вести анализ с конца (обратная схема). Обозначим $f_k(x^k)$ – оптимальное значение целевой функции, сложившееся из шагов после состояния x^k, т.е. за последние (K - k) шагов. Аналогично предыдущему

$$\begin{cases} f_{k-1}(x^{k-1}) = \underset{u^k}{\mathrm{opt}}\{w_k(x^{k-1}, u^k) + f_k(x^k)\}, k = K, K-1, \ldots, 1 \\ f_K(x^K) = 0 \end{cases} \quad - \qquad (19)$$

– уравнение Беллмана в обратной форме.

В нашем примере прибыль в k-м периоде

$$w_k(x^{k-1}, u^k) = \begin{cases} r(x^{k-1}) - c(x^{k-1}), u^k = 1(\text{оставить}) \\ r(0) - c(0) - p, u^k = 0(\text{купить новое}) \end{cases}.$$

После расчётов по (19) получим ответ

k	0	1	2	3	4	5
x_*^k	0	1	2	3	1	2
u_*^k	–	ост.	ост.	ост.	замен.	ост.
$f_k(x_*^k)$	215	155	105	70	50	0

т.е. максимальная прибыль 215 тыс. руб. будет получена при замене оборудования после 3-х лет работы.

4.3. Управление конечным состоянием (задача Майера)

В ряде задач траектория изменения состояния системы интереса не представляет, а существенным является x^K – конечное состояние системы, т.к. весь проигрыш (выигрыш) определяется только им.

Если известно начальное состояние x^0, то можно применить прямую форму уравнения Беллмана (17), только теперь $w_k(x^{k-1}, u^k) = 0, k = 1, 2, ..., K-1$, а $w_K(x^{K-1}, u^K) = w_K(\varphi^{-1}(x^K, u^K), u^K) = w(x^K)$ – известная функция от конечного состояния.

Пример 4.4

Самолёт заходит на посадку и находится на высоте $x^0 = 7$ м. Нужно за три шага посадить его на землю. На отдельных шагах выдаются импульсы «вниз – вверх» так что состояние изменяется по закону $x^k = x^{k-1} + u^k$. Допустимые значения управлений $u^1 \in \{-1, 0, 1\}, u^2 \in \{-4, 0, 4\}, u^3 \in \{-9, 0, 9\}$. Потери оцениваются квадратом отклонения от 0 в конце процесса, т.е. $w(x^3) = (x^3 - 0)^2$.

Ответ:

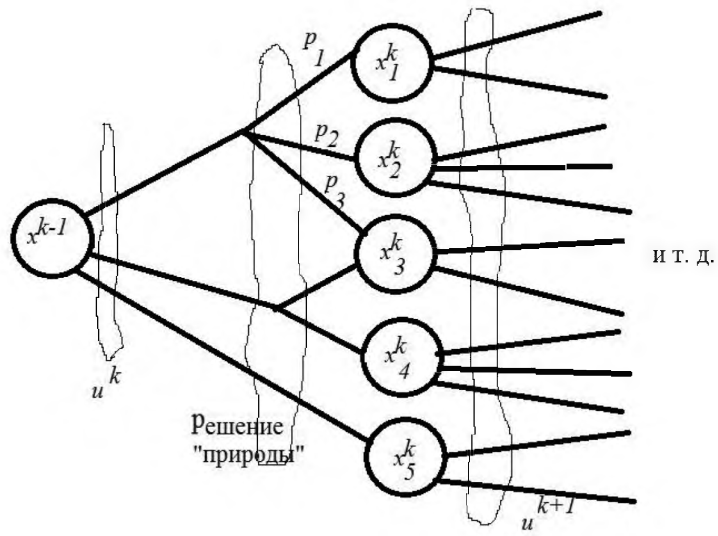
k	0	1	2	3
x_*^k	7	8	8	-1
u_*^k	–	+1	0	-9
$z_k(x_*^k)$	0	0	0	1

4.4. Решение задачи коммивояжёра методом динамического программирования

Здесь в качестве этапов рассматриваются под маршруты, начинающиеся в исходном городе и включающие всё большее число городов. При этом отбрасываются «бесперспективные» более длинные варианты, относящиеся к одному и тому же множеству городов и оканчивающиеся в одном и том же городе.

4.5. Стохастические модели динамического программирования

Стохастический – от греческого слова «благоразумный», т. е. модели применяются к случайным, вероятностным явлениям. Здесь после вашего управления «природа» добавляет своё случайное управление и новое состояние становится случайным. И выигрыш на этапе может быть случайным $W_k(x^{k-1}, u^k)$, и оптимизировать можно только математическое ожидание выигрыша от этого момента (и состояния) до конца.



Дерево решений – графическое изображение последовательности решений природы и состояний системы с указанием соответствующих вероятностей и выигрышей.

Пример 4.5

Фирме предстоит принять решение: внедрять или нет в массовое производство новый продукт. В начальном состоянии у фирмы есть 3 возможности: отказаться от проекта вообще (D), приступить к массовому производству (L), произвести пробный сбыт небольшой партии на экспериментальном рынке (T).

При отказе – дальнейший выигрыш = 0, при L с вероятностью 0,3 может быть «успех» (прибыль 3 млн. долл.) и с вероятностью 0,7 «неудача» (убыток 0,25 млн. долл. (прибыль -0,25)). Пробный сбыт требует затрат 22500 долл. и с вероятностями 0,5; 0,25; 0,25 приводит к состояниям:

a) продукт продегустировали < 10% потребителей;

b) продукт продегустировали > 10%, купили повторно < 50% из них;

c) продукт продегустировали > 10%, купили повторно > 50% из них.

После каждого из них можно отказаться от проекта или запустить массовое производство, вероятности «успеха» при этом 0.06, 0.28, 0.8 соответственно. (Эти вероятности берутся из накопленной статистики по аналогичным примерам или из субъективных оценок экспертов).

Как поступить? Что делать в начальном состоянии?

Ясно, что в таких задачах мы не станем заранее связывать себя обязательствами по нашим управлениям на все шаги вперёд, а наоборот, подождём, в каком состоянии окажемся накануне принятия решения и, исходя из этого, примем решение, т.е. желательно узнать $u^k(x^{k-1})$. Такие условно оптимальные управления даёт уравнение Беллмана в обратной форме. Обозначим $f_{k-1}(x^{k-1})$ – максимальное математическое ожидание прибыли от момента (k – 1) до K, в зависимости от имеющегося состояния x^{k-1}.

$$\begin{cases} f_{k-1}(x^{k-1}) = \max_{u^k}\{M[W_k(x^{k-1},u^k) + f_k(X^k)]\}, k = K, K-1,...,1 \\ f_K(x^K) = 0 \end{cases} . \quad (20)$$

$k = 2.$ $f_1(x^1) = \max_{u^2}\{MW_2(x^1,u^2)\}$

x^1	O_{11}	S_{11}	F_{11}	a			b			c		
u^2	–	–	–	$\underline{D}$	L		D	$\underline{L}$		D	$\underline{L}$	
x^2	–	–	–	O_{21}	S_{21}	F_{21}	O_{22}	S_{22}	F_{22}	O_{23}	S_{23}	F_{23}
Mw_2	0	0	0	$\underline{0}$	– 0,055		0	$\underline{0{,}66}$		0	$\underline{2{,}35}$	
$f_1(x^1)$	0	0	0	0			0,66			2,35		

$k = 1$. $f_0(x^0) = \max\limits_{u^1}\{M[w_1(x^0, u^1) + f_1(X^1)]\}$.

x^0	x^0					
u^1	D	L		$\underline{T}$		
x^1	O_{11}	S_{11}	F_{11}	a	b	c
Mw_1	0	0.725		– 0.0225		
$Mf_1(X^1)$	0	0		$0{,}5f(a)+0{,}25f(b)+0{,}25f(c) = 0{,}7525$		
Σ	0	0.725		$\underline{0{,}73}$		
$f_0(x^0)$	0,73					

Т. о. $u_*^1(x^0) = T$ (пробный сбыт), а мы и есть в x^0, значит это безусловно оптимальное управление. Ожидаемая прибыль за все этапы $f_0^* = f_0(x^0) = 0{,}73$ млн. долл. Из приведённых таблиц следует, если

$x_*^1 = a \to u_*^2 = u^2(a) = D;$

$x_*^1 = b \to u_*^2 = u^2(b) = L;$

$x_*^1 = c \to u_*^2 = u^2(c) = L.$

k	0	1		
x_*^k	x^0	a	b	c
u_*^{k+1}	T	D	L	L
$f_k(x_*^k)$	0,73	0	0,66	2,35

Ожидаемое значение прибыли с момента 1 может быть больше, чем с момента 0 (2,35 > 0,73).

4.6. Управляемые марковские процессы

Пример 4.6 [10]

Киоск продаёт или Кока-Колу, или Пепси-Колу. Поставки делаются на неделю. В конце недели владелец киоска может быть в состоянии успеха от продаж (S_1, $x = 1$) или неудачи (S_2, $x = 2$). Если был успех, марка напитка не менялась, если неудача – марка менялась на противоположную. Назовём это управлением 1. При этом было замечено, что вероятности перехода между состояниями за неделю и соответствующие значения прибыли за неделю были:

$S_1 \to S_1, p_{11} = 0{,}5, w_{11} = 500;$

$S_1 \to S_2, p_{12} = 0{,}5, w_{12} = 150;$

$S_2 \to S_1, p_{21} = 0{,}7, w_{21} = 200;$

$S_2 \to S_2, p_{22} = 0{,}3, w_{22} = -400.$

Продавец решил попробовать улучшить торговлю: после успеха стал разворачивать рекламные плакаты с тем же напитком, а после неудачи – переходить на другой напиток и снижать цену на 10% (управление = 2). При этом он заметил $P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ – стало лучше, например, с большей вероятностью возвращаемся к успеху. Но появились дополнительные расходы, прибыль за неделю $W^{(2)} = \begin{pmatrix} 400 & 200 \\ 100 & -800 \end{pmatrix}$, т. е. выросла только при переходе от успеха к неудаче.

Пусть у нас впереди K недель. Как следует управлять на каждой неделе, чтобы получить максимальную суммарную прибыль? Так как переход из x^{k-1} может быть в случайное состояние X^k, то в (20)

$$\max_{u^k}\{M[W_k(x^{k-1},u^k)+f_k(X^k)]\}=\max_{u^k}\{M[W^{(u^k)}_{x^{k-1}X^k}+f_k(X^k)]\}=$$
$$=\max_{u^k}\{\sum_{x^k=1}^{2}W^{(u^k)}_{x^{k-1}x^k}P^{(u^k)}_{x^{k-1}x^k}+\sum_{x^k=1}^{2}f_k(x^k)P^{(u^k)}_{x^{k-1}x^k}\}=\max_{u^k}\{\overline{w}(x^{k-1},u^k)+\sum_{x^k=1}^{2}f_k(x^k)P^{(u^k)}_{x^{k-1}x^k}\},$$

где $\overline{w}(x^{k-1},u^k)$ – вектор из диагональных элементов произведения матриц $P^{(u^k)}(W^{(u^k)})^T$. Первая координата при $x^{k-1}=1$ – «успех», вторая при «неудаче». Пусть $K = 4$.

$k=4.$ $f_3(x^3)=\max_{u^4}\{\overline{w}(x^3,u^4)+0\}=\max_{u^4}\{\begin{matrix}325 & 320\\ 20 & -80\end{matrix}\}=\begin{pmatrix}325\\ 20\end{pmatrix}$. $u^4(x^3)=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

$k = 3.$ $f_2(x^2)=\max_{u^3}\{\overline{w}(x^2,u^3)+\sum_{x^3=1}^{2}P^{(u^3)}_{x^2x^3}f_3(x^3)\}=\max_{u^3}\{\begin{pmatrix}497,5\\ 253,5\end{pmatrix};\begin{pmatrix}523\\ 184\end{pmatrix}\}=\begin{pmatrix}523\\ 253,5\end{pmatrix}$.

Значит, $u^3(x^2)=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$.

$k=2.$ $f_1(x^1)=\begin{pmatrix}735,2\\ 462,15\end{pmatrix}$. $u^2(x^1)=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$.

$k=1.$ $f_0(x^0)=\begin{pmatrix}945,98\\ 673,285\end{pmatrix}$. $u^1(x^0)=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$.

Таким образом оптимальное управление для периодов (недель) 1, 2, 3:
– если предшествующая неделя была успешной – управление 2 (разворачивать рекламу, оставить напиток);
– если предшествующая неделя была неудачной – управление 1 (просто сменить напиток, никаких дополнительных мер).

Для последней недели $k = K = 4$:
– если предшествующая неделя была успешной – управление 1 (ничего не делать, оставить напиток);
– если предшествующая неделя была неудачной – управление 1 (просто сменить напиток, никаких дополнительных мер).

При этом если вы начинали после успеха, вас ждёт в среднем оптимальная прибыль 945,98 руб. за 4 недели, если начинали после неудачи, то 673,285 руб. Или средняя еженедельная прибыль в этих случаях 236,495 и 168,321 руб.

Ясно, что при $K \to \infty$ и таком же оптимальном управлении, начало забывается и средняя еженедельная прибыль в этих случаях сближается (можно показать, к 210,91 руб.).

Задача о наилучшем выборе

Пример 4.7

Невеста выбирает себе жениха из N претендентов, которые появляются по одному. Ясно, что один из них наилучший, но отвергнутого уже вернуть нельзя. Процесс выбора заканчивается, как только невеста останавливается на каком-либо очередном претенденте. Как ей поступить?

Ограничимся процедурами отбора следующего типа: первый жених либо принимается, либо отвергается. Если он отвергается, то автоматически отвергаются и все последующие женихи, которые хуже, чем первый, и следующее решение принимается лишь при появлении жениха лучшего, чем первый. И так далее.

Обозначим k = 0, 1, 2, …– моменты появления очередных лидеров. Состояние системы в каждый из этих моментов описывается x^k – номер жениха (число уже появившихся), ставшего лидером в момент k. Т. о. $x^0 = 1$ и т.д. В каждый момент k – 1 (т. е. на этапе от k –1 до k) мы можем применить управление u^k (= 1 – принять соответствующего лидера за жениха, = 2 – продолжить осмотр следующих).

Цель – максимизировать мат. ожидание вероятности того, что выбранный на k* этапе (в момент k*– 1) жених является наилучшим из всех.

Если выбор останавливается на x^{k-1}-м по счёту женихе, то вероятность, что он и есть наилучший: $w(x^{k-1}, u^k = 1) = \dfrac{x^{k-1}}{N}$.

Это вероятность, что один конкретный (наилучший вообще) из N попадёт в первые x^{k-1} человек (то, что он будет являться последним из этих – не важно, просто мы при этом как раз остановимся).

Каковы вероятности переходов $p^{(u^k=2)}_{x^{k-1},x^k}$?

$p^{(u^k=2)}_{x^{k-1},x^k} = P(x^k \mid x^{k-1}) = P$(следующий лидер будет x^k - м|предыдущий был x^{k-1} - м)
$= P[$(в диапазоне $x^{k-1}+1, x^{k-1}+2, \ldots, x^k - 1$ лидера не было)$\cdot$
$\cdot(x^k$ - м будет лучший из $x^k)] = \dfrac{x^{k-1}}{x^k - 1} \cdot \dfrac{1}{x^k}$.

Пусть $f_{k-1}(x^{k-1})$ – максимальное математическое ожидание вероятности выбора наилучшего на шагах с $k-1$ до последнего в зависимости от состояния x^{k-1} .
Уравнение Беллмана

$$f_{k-1}(x^{k-1}) = \max_{u^k}\{w(x^{k-1}, u^k = 1), \sum_{x^k = x^{k-1}+1}^{K} f_k(x^k) P^{(u^k=2)}_{x^{k-1},x^k}\},$$

второе выражение соответствует управлению «продолжить».

Если $x^k = N$, то ясно $f_k(x^k = N) = 1$, абсолютный лидер – последний, его взять! Так как $\sum_{x^k=N}^{N} 1 \cdot P_{x^{k-1}x^k} = \dfrac{x^{k-1}}{(N-1)\cdot N} < w(x^{k-1}, u^k = 1) = \dfrac{x^{k-1}}{N}$, значит $u^k(x^k = N) = 1 -$ «брать», и $f_{k-1}(x^{k-1}) = \dfrac{x^{k-1}}{N}$.

Так будет, пока второе выражение не превысит первое, тогда впервые (с конца) условно оптимальным управлением будет «продолжить», т. е.

$$\frac{x^{k*}}{N} \le \sum_{x^{k*+1} = x^{k*}+1}^{N} P_{x^{k*},x^{k*+1}} \frac{x^{k*+1}}{N} \text{ или } \frac{x^{k*}}{N} \le \sum_{x^{k*+1} = x^{k*}+1}^{N} \frac{x^{k*}}{x^{k*+1} - 1} \frac{1}{x^{k*+1}} \frac{x^{k*+1}}{N},$$

$\sum_{l=m+1}^{N} \dfrac{1}{l-1} \ge 1$. Отсюда находим $m_{\max} = x^{k*}$ – номер человека-лидера, после которого u^{k*+1} = «продолжить», при меньших x^k u^{k+1} также будет «продолжить». Т. о. нужно последним пропустить лидера с номером $m_{\max}$ (если он, очередной лидер, появится с этим номером). Следующего лидера уже надо брать. Это эквивалентно такой стратегии: пропустить первые m_{max} женихов, затем взять первого, который лучше всех предшествующих.

$N = 2$	$\frac{1}{1} \geq 1 \quad m_{max} = 0$	$f^* = 0.5$
$N = 3$	$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \geq 1 \quad m_{max} = 1$	$f^* = \frac{1}{3}(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}) = 0{,}5$
$N = 4$	$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \geq 1 \quad m_{max} = 1$	$f^* = 11/24 = 0{,}458$
$N = 5$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 \; m_{max} = 2$	…
…	…	…
$N = 10$	$m_{max} = 3$	…
…	…	…
$N = 20$	$m_{max} = 7$	…
…	…	…
$N = \infty$	N/e	$1/e$

Упражнения

Упражнение 4.1

Предприятие выпускает консервы (овощной суп с цыплятами) в течение овощного сезона (5 недель). Договор на поставку цыплят заключается перед началом сезона. В неделю перерабатывается 1 т цыплят. Цена цыплёнка зависит от размера покупаемой партии, которая должна быть кратна 1 т и не превышать 3 т. Если цыплят не используют в ту же неделю, когда они доставлены, их следует хранить в холодильнике, который арендуется предприятием. Требуется определить, сколько следует покупать цыплят каждую неделю, чтобы минимизировать суммарные затраты на покупку и хранение, если цены и затраты:

Количество цыплят, т	Цена, руб.	Запас, т	Цена хранения, руб.
1	410	1	30
2	780	2	100
3	1100	3	200

Упражнение 4.2

Студент оканчивает институт и хочет получить на 4-х экзаменах максимальное число баллов. У его есть10 дней на подготовку.

Предметы	Затраченные дни на подготовку	Баллы
2 лёгких	0	0
	1 или 2	2
	3	3
	4	4
2 трудных	0	0
	1 или 2	1
	3	2
	4	3
	5	4

Найти оптимальное распределение дней на предметы. Какова оценка в баллах одного дополнительного дня? Какова потеря в баллах, если дней будет 9?

Упражнение 4.3

Распределить капиталовложения в размере 50 тыс. руб. между тремя предприятиями с целью получения наибольшей суммарной прибыли, если величина прибыли, даваемой каждым предприятием, в зависимости от капиталовложений в него, в тыс. руб. даётся функциями:

$f_1(u) = 0,2u$, $f_2(u) = 0,0012u^2$, $f_3(u) = -0,0024u^2 + 0,36u$.

Упражнение 4.4

Распределить капиталовложения в размере 150 тыс. руб. между теми же предприятиями что и в *упр*. 4.3.

Упражнение 4.5

$\sum (u^k)^2 \to \max,\ 0 \le u^k$, $\sum u^k = R$

Упражнение 4.6

$\sum w_k (u^k)^2 \to \max,\ 0 \le u^k$, $\sum u^k = R$, w_k – фиксированные неотрицательные веса. Показать, что решение по методу динамического программирования совпадает с решением этой задачи как задачи нелинейного программирования. Решить частную задачу: $K = 3$; $w_k = 2, 3, 6$; $R = 100$.

Упражнение 4.7

Распределить 16 единиц ресурса между 5 предприятиями с целью максимизации суммарной отдачи. u^k – ресурс, выделяемый k-му предприятию, $W_k(u^k)$ – функция отдачи k-го предприятия, a^k , b^k – границы возможных значений u^k. Управления u^k изменяются дискретно с шагом 1.

$$w_k(u^k) = \begin{cases} c^k_1 + c^k_2 u^k, & \text{если } u^k \le c^k \\ c^k_1 + (c^k_2 - c^k_3)c^k + c^k_3 u^k, & \text{если } u^k > c^k \end{cases}$$

k	a^k	b^k	c^k_1	c^k_2	c^k	c^k_3
1	3	7	4	1	4	1,5
2	0	4	2	2	2	1,5
3	3	5	3	1,5	3	2,0
4	1	3	0	2,5	2	1,0
5	5	7	5	0.5	6	1,0

Упражнение 4.8

Пусть A – матрица $m*n$. Найти траекторию перехода от a_{11} до a_{mn}, минимизирующую сумму элементов, через которые она проходит. Перемещения разрешены только вниз или направо.

Упражнение 4.9

Рассмотреть задачу линейного программирования $\sum c_k u^k \to \max$, $Au \le b$, $u \ge 0$, как задачу динамического программирования, позволяя управлениям по одному добавочно выходить из 0.

Упражнение 4.10

Получить решение примера 4.3.

Упражнение 4.11

Вы собираетесь купить автомобиль и эксплуатировать его 5 лет. Затем его продать. В начале каждого года можно принять решение сохранить автомобиль или заменить его новым (таким же). Стоимость нового автомобиля 4000 у. е. После x лет эксплуатации его можно продать за $4000/2^x$ у. е. (ликвидная стоимость). Затраты на содержание в течение года $600*(x+1)$. Определить оптимальную стратегию эксплуатации автомобиля, чтобы суммарные затраты с учётом начальной покупки и заключительной продажи были минимальны.

Упражнение 4.12

Планируемый период – 3 этапа. Расход в каждом этапе – независимые случайные величины D с распределением:

d_i	2	4
p_i	½	½

Начальный уровень запаса $x^0 = 2$. Затраты на хранение $\varphi(x^k) = \alpha * x^k$, $\alpha = 1$. Затраты на пополнение следующие:

u^k	0	1	2	3	4	5
$\psi(u^k)$	0	15	17	19	21	23

$u^k \leq 5$; $x^k \leq 4$ – емкость склада. Расход должен быть безусловно обеспечен. Найти управления u^k, минимизирующие суммарные затраты на пополнение и хранение.

Упражнение 4.13

Компания «ВМС» рассматривает три варианта:

А. Построить завод стоимостью 600 000 у. е. При большом спросе (ожидается с вероятностью 0.7) будет ежегодный доход в 250 000 у. е. в течение 5 лет. Если спрос будет низким (ожидается с вероятностью 0,3), то ежегодные убытки составят 50 000 у. е.

Б. Построить маленький завод стоимостью 350 000 у. е. При большом спросе ежегодный доход составит 150 000 у. е., при низком спросе – 25 000 у. е.

В. Сразу завод не строить, а отложить решение на 1 год для сбора дополнительной информации, которая может быть позитивной или негативной, с вероятностями 0,8 и 0,2 соответственно. При позитивной – можно строить большой или маленькие заводы по тем же ценам. Вероятности большого и низкого спроса теперь будут 0,9 и 0,1. Доходы на последующие 4 года будут, как и прежде. При негативной информации – вообще никакого завода не строить.

a) построить дерево решений;

b) пусть строительная компания предлагает фирме скидку, если она сразу приступит к строительству большого завода. Какова должна быть величина скидки, (%), чтобы фирма отказалась от ранее выбранного варианта?

Упражнение 4.14

Банк может вложить 15000 у. е. под 9 % годовых (со 100 % надёжностью) или ссудить их под 15 % годовых, зная, что вероятность возврата 0,96, а потери – 0,04. Можно провести аудиторскую проверку клиента, это стоит 80 у. е. Известно, что аудиторская фирма рекомендует подобных клиентов с вероятностью 0,75, не рекомендует с 0,25. Если рекомендует, то возврат ссуды будет с вероятностью 0,98, если нет, то с 0,9. Какое решение принять банку?

Упражнение 4.15

Фирма осуществляет массовое производство прохладительных напитков. Годовой сбыт продукции фирмы составляет 1 млн баррелей, прибыль на баррель равна 5 долл. Владельцы многих крупных магазинов самообслуживания предложили фирме выпустить новый напиток, которым будут торговать только эти магазины. Цена напитка этого сорта должна обеспечивать магазинам прибыль в размере 0.25 долл. с барреля. Руководство фирмы, выпускающей напитки, считает, что объем сбыта этого сорта составит одну четверть общего объема сбыта. Если оно откажется от этого предложения, то его может принять один из ее конкурентов. В этом случае у фирмы имеются следующие альтернативы: ничего не предпринимать для сохранения существующего объема сбыта; увеличить расходы на рекламу текущей продукции на 350 тыс. долл.; снизить цены на свою продукцию до уровня, при котором прибыль составит 4.5 долл. на баррель. При выборе последней альтернативы конкуренты также могут пойти на снижение цен. Руководители фирмы определили приведенные ниже субъективные оценки вероятностей различных событий, фигурирующих в описанной ситуации. Следует ли принять предложение о выпуске нового напитка специально для магазинов самообслуживания?

А. В случае согласия вероятность сокращения сбыта на 10% равна 0,8, на 20% – 0,1 и на 30% – 0,1.

Б. При отказе от предложения вероятность того, что какой-либо из конкурентов примет его, составляет 0,5.

В. При согласии конкурента и непринятии каких-либо мер со стороны фирмы объем сбыта может сократиться на 10, 20 или 30% с соответствующими вероятностями 0,8; 0.1 и 0.1.

Г. При согласии конкурента и затратах фирмой дополнительно 350 тыс. долл. на рекламу текущей продукции объем сбыта может не измениться либо сократиться на 5 или 10% с соответствующими вероятностями 0,3; 0.4 и 0.3.

Д. Если при согласии конкурента выпускать новый напиток, фирма вместо увеличения средств на рекламу снизит цены на свои напитки, то вероятность того, что конкурент также пойдет на это, равна 0,3. Если обе стороны снизят цены, то объем сбыта фирмы может сократиться на 5, 10 или 15 % с вероятностями 0.5; 0,2 и 0,3 соответственно. Если же только данная фирма снизит цены, то сбыт может не измениться или снизиться на 5 либо 10 % с вероятностями 0,3; 0,5 и 0,2 соответственно.

Упражнение 4.16

При крупном автомобильном магазине планируется открыть мастерскую по предпродажному обслуживанию и гарантийному ремонту автомобилей. Консультационная фирма готова предоставить дополнительную информацию о том, будет ли рынок благоприятным или нет. Эти сведения обойдутся магазину в 13 тыс. руб. Администрация магазина считает, что с вероятностью 0.5 эта информация будет положительной (т.е. что рынок благоприятен). Если рынок будет благоприятным, то большая мастерская принесёт прибыль в 60 тыс. руб., а маленькая – 30 тыс. руб. При неблагоприятном рынке магазин потеряет 65 тыс. руб., если будет открыта большая мастерская, и 30 тыс. руб. – если откроется маленькая. Не имея дополнительной информации, директор оценивает вероятность благоприятного рынка как 0,6. Положительный результат обследования гарантирует благоприятный рынок с вероятностью 0,8. При отрицательном результате рынок может оказаться благоприятным с вероятностью 0,3. Постройте дерево решений и определите:

• Следует ли заказать консультационной фирме дополнительную информацию, уточняющую конъюнктуру рынка?

• Какую мастерскую следует открыть при магазине: большую или маленькую?

• Какова ожидаемая денежная оценка наилучшего решения?

• Какова ожидаемая ценность дополнительной информации?

Упражнение 4.17

Фирма, производящая вычислительную технику, провела анализ рынка нового высокопроизводительного персонального компьютера. Если будет выпущена крупная партия компьютеров, то при благоприятном рынке прибыль составит 250 тыс. руб., а при неблагоприятных условиях фирма понесет убытки в 185 тыс. руб. Небольшая партия техники в случае ее успешной реализации принесет фирме 50 тыс. руб. прибыли и 10 тыс. руб. убытков – при неблагоприятных внешних условиях. Возможность благоприятного и неблагоприятного исходов фирма оценивает одинаково. Исследование рынка, которое может провести эксперт, обошлось бы фирме в 15 тыс. руб. Вероятность того, что эксперт даст положительное заключение – 0,6. В то же время при положительном заключении благоприятные условия ожидаются лишь с вероятностью 0,8. При отрицательном заключении с вероятностью 0,15 рынок также может оказаться благоприятным, но при этом, наряду с выпуском крупной или небольшой партии следует рассмотреть возможность отказа от выпуска вообще. Используйте дерево решений для того, чтобы помочь фирме выбрать правильную технико-экономическую стратегию. Ответьте на следующие вопросы:

• Следует ли заказывать эксперту исследование рынка?

• Какова ожидаемая денежная оценка наилучшего решения?

• Какую максимальную сумму фирма может выплатить эксперту за проделанную работу?

Упражнение 4.18

Найти в примере 4.6 среднюю прибыль за 4 недели при управлении = 1 всегда, 2 всегда.

Упражнение 4.19

Подтвердить асимптотические (при увеличении N) результаты примера 4.7.

5. Сетевые методы планирования и управления

Впервые подобные методы были разработаны в США в 1950-х годах. *CPM* (*Critical Path Method*) – Метод критического пути – при планировании ежегодных работ на нефтеочистительном заводе и *PERT* (*Program Evaluation and Review Technique*) – Техника оценки и пересмотра программы – при разработке атомных подводных лодок «Поларис».

Пример 5.1

Информация о проекте задана перечнем работ, их продолжительностью и последовательностью выполнения.

Работа (операция)	Какие работы делают её возможной	Продолжительность	Работа (операция)	Какие работы делают её возможной	Продолжительность
A	-	30	G	C,B	21
B	-	7	H	F,G	7
C	A	10	I	F,G	12
D	C,B	14	J	I,H	15
E	D	10	K	B	30
F	E	7	L	K,G,F	15

Правила построения сетевого графика:

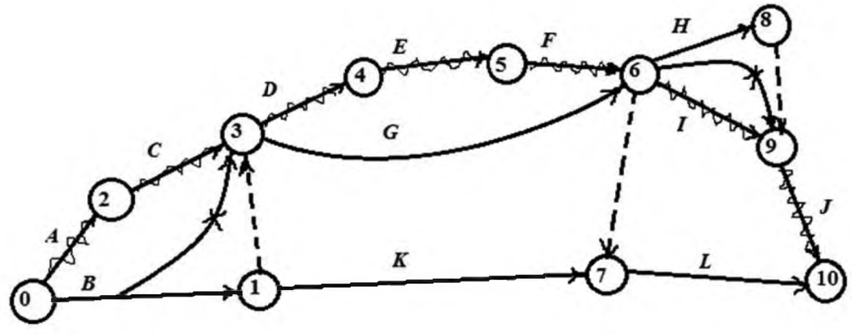
1) работы отображаются дугами со стрелками;

2) начало и окончание работы отображаются кружками-событиями;

3) событию начала проекта присваивают номер 0, остальным 1, 2, …, n так, что если есть стрелка из i в j, то $i < j$;

4) если 2 или более работ начинаются и заканчиваются одними и теми же событиями, то с целью однозначного определения работ номерами событий, между которыми она заключена, вводят фиктивное событие и фиктивную работу (см. событие 8).

В нашем примере получаем следующий график.



5.1. Анализ сетевого графика

Поставим задачу определения минимальной продолжительности выполнения всего проекта (комплекса работ). Переобозначим работы номерами их начала и конца.

Работа (i,j)	0,1	0,2	1,3	1,7	2,3	3,4	3,6	4,5	5,6	6,7	6,8	6,9	7,10	8,9	9,10
$t_{i,j}$	7	30	0	30	10	14	21	10	7	0	7	12	15	0	15
$r_{i,j}$	33	0	33	46	0	0	10	0	0	12	5	0	12	5	0

Ранним сроком t_i события i назовём минимальное время (от начала проекта t_0) наступления события i (когда завершатся все работы, входящие в i). Очевидно $t_1 = t_0 + t_{0,1} = 0 + 7 = 7, t_2 = t_0 + t_{0,2} = 30$. В событие 3 можно попасть 2 путями

0,1,3 или 0,2,3. Ясно, что ранний срок t_3 определяется длиной максимального из этих путей: $t_3 = \max\{t_1 + t_{1,3}, t_2 + t_{2,3}\} = \max\{7+0, 30+10\} = 40$.

$t_4 = t_3 + t_{3,4} = 40 + 14 = 54, ..., t_n = t_{10} = 98$, то есть весь проект можно завершить за 98 дней. Правила были

$t_0 = 0, t_i = \max\limits_k \{t_k + t_{k,i}\}, i = 1,2,...,n, k$ берётся по всем событиям, для которых $\exists$ работы (k,i).

Поздним сроком T_i *события* i назовём максимальное время наступления события i, при котором ещё возможно выполнение проекта к моменту t_n. Ясно, что $T_n = T_{10} = t_n = 98$. Если событие 9 наступает в любой момент времени до срока $T_{10} - t_{9,10} = 98 - 15 = 83$, то срок наступления события 10 не удлиняется. Т. о. $T_9 = 83$. Общее правило

$T_n = t_n, T_i = \min\limits_j \{T_j - t_{i,j}\}, i = n-1, n-2, ..., 0, j$ берётся по всем событиям, для которых $\exists$ работы (i, j).

Резерв времени события i $T_i - t_i$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i	0	7	30	40	54	64	71	71	78	83	98
T_i	0	40	30	40	54	64	71	83	83	83	98
Резерв	0	33	0	0	0	0	0	8	5	0	0

События, имеющие нулевой резерв времени, называются критическими. Удобнее, однако, выявить критические работы. Резервом (полным) времени $r_{i,j}$ работы (i, j) называется максимально возможное увеличение продолжительности работы без увеличения времени выполнения всего проекта. Очевидно $r_{i,j} = T_j - t_i - t_{i,j}$. Так $r_{0,1} = T_1 - t_0 - t_{0,1} = 40 - 0 - 7 = 33$, то есть работу B можно удлинить на 33 дня без ущерба для всего проекта. $r_{0,2} = 30 - 0 - 30 = 0$ и т. д.

Иногда вводят для работ раннее время начала $ES_{i,j} = t_i$, позднее время начала $LS_{i,j} = T_i - t_{i,j}$, раннее время окончания $EF_{i,j} = t_i + t_{i,j}$, позднее время окончания $LF_{i,j} = T_j$.

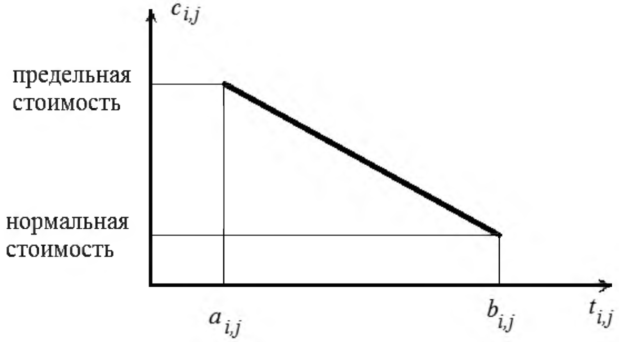
Работы, имеющие нулевой резерв времени, называются критическими. Критический путь – это любой путь из $i = 0$ в $i = n$ длины t_n – критическое время проекта (длина). Ясно, что критический путь состоит из критических работ, на которые при выполнении проекта и следует обращать наибольшее внимание.

Находим резервы всех работ и выявляем критические (см. таблицу на предыдущей странице). Изобразим критический путь на графике.

Если задан директивный срок выполнения проекта θ_n, а из анализа получается $t_n > \theta_n$, то нужно уменьшить продолжительность критических работ путём привлечения дополнительных средств (наём дополнительных работников, техники и т. п.). Где их взять? Из работ, имеющих резерв времени. Меньше останется средств – работа удлинится, но в пределах резерва это неважно. Это получит развитие в методе *CPM*.

5.2. Метод критического пути (*CPM*)

Примем, что продолжительность работы зависит от вложенных в неё средств, т.е. её стоимости $c_{i,j}$:



$c_{i,j} = k_{i,j} - t_{i,j}h_{i,j}$, $h_{i,j}$ – затраты на ускорение работы на единицу времени.

$$a_{i,j} \le t_{i,j} \le b_{i,j}, \qquad (21)$$

где $a_{i,j}$ – предельная длительность, $b_{i,j}$ – нормальная длительность.

Общая стоимость всего проекта равна сумме стоимостей всех работ:

$$C = \sum_{i,j}(k_{i,j} - t_{i,j}h_{i,j}) = \sum_{i,j}k_{i,j} - \sum_{i,j}t_{i,j}h_{i,j}\,. \qquad (22)$$

Выбрав все $t_{i,j} = b_{i,j}$, получим минимальную стоимость проекта, но при максимальной продолжительности $t_n = \lambda_M$. Поэтому интерес *представляет задача метода CPM*: отыскать набор длительностей работ $t_{i,j}$, минимизирующий стоимость C проекта при ограничении, что продолжительность проекта должна быть λ $(\lambda < \lambda_M)$.

Эту задачу можно сформулировать как задачу линейного программирования. В выражении (22) первая сумма постоянна, поэтому можно искать $z = \sum_{i,j} t_{i,j}h_{i,j} \to \max$ – целевая функция. Ограничения: было $t_i = \max_k\{t_k + t_{k,i}\}$, это можно заменить

$$t_i \ge t_k + t_{k,i} \forall k, \qquad (23)$$

но в то же время сроки t_i должны быть минимально возможными. Этого можно достичь, взяв целевую функцию вида

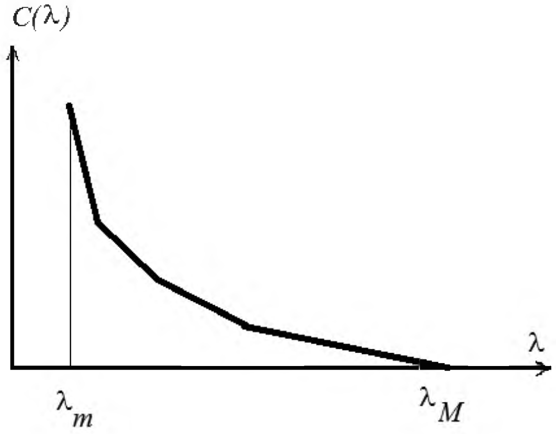
$$z' = \sum_{i,j} t_{i,j}h_{i,j} - \sum_i t_i M_i \to \max, \qquad (24)$$

где M_i – больше положительные константы. Ещё ограничение:

$$t_n = \lambda\,. \qquad (25)$$

Видно, что формулы (21), (23), (24), (25) – задача линейного программирования с числом переменных равным сумме числа работ $t_{i,j}$ и n – числа событий (кроме начального). Задача всегда громоздкая. Существуют и упрощённые (менее оптимальные) методы, например в пакете ПЭР. В любом случае их цель –

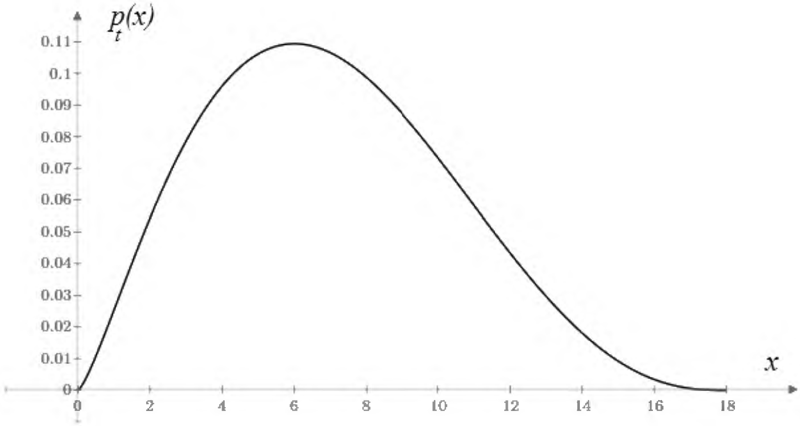
определение функции $C(\lambda)$ – зависимости минимально возможного удорожания стоимости проекта от времени λ его выполнения и соответствующего набора $t^*_{i,j}$. Функция эта обычно имеет следующий вид.



5.3. Метод *PERT*

Этот метод обобщает анализ сетевого графика в более реалистическую ситуацию, когда продолжительности выполнения работ являются случайными величинами. Они имеют наименьшую длительность a (оптимистическая оценка), наибольшую длительность b (пессимистическая оценка) и моду mo (наивероятнейшая оценка). Подходящее распределение, обладающее естественными нижним и верхним пределами – обобщённое бета-распределение:

$$p_t(x) = k(x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}.$$



$$Mt = \frac{a\beta + b\alpha}{\alpha+\beta},\; mo = \frac{a(\beta-1)+b(\alpha-1)}{\alpha+\beta-2},\; Dt = \frac{\alpha\beta(b-a)^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Поэтому, если ещё задать математическое ожидание $m = Mt$ продолжительности работы, например, равное прежней предполагаемой фиксированной длительности, то определятся параметры α и β, а значит и дисперсия Dt.

Пример 5.1 (продолжение)

Пусть о работе (0, 1) предполагаем $a = 0$, $b = 18$, $mo = 6$, $m = 7$. Тогда $\alpha = 2{,}33$ и $\beta = 3{,}66$ и $Dt = 11$.

Теперь можно говорить лишь о математических ожиданиях (м. о.) ранних и поздних сроков наступления событий, но так как м. о. суммы равно сумме м. о., то значения будут те же. Аналогично прежнему находится критический путь и его ожидаемое время Mt_n.

Считая времена выполнения работ независимыми случайными величинами, можно рассчитать дисперсии ранних сроков по формуле $\sigma_i^2 = \sum_{k=0}^{l=i} \sigma_{k,l}^2$ – сумма по работам на критическом пути. При $i = n$ σ_n^2 даст дисперсию Dt_n критического времени проекта.

Так как обычно t_i является суммой большого числа независимых случайных величин, то по центральной предельной теореме можно считать $t_i \sim N(Mt_i, \sigma_i)$ и если заданы директивные сроки θ_i достижения событий, то можно рассчитать вероятности уложиться в эти сроки. Например, вероятность выполнения всего проекта в срок θ_n:

$$P\{t_n \le \theta_n\} = \Phi(\frac{\theta_n - Mt_n}{\sigma_n}) \ .$$

Если в нашем примере $\theta_n = \theta_{10} = 105, Mt_n = 98$,

$\sigma_n^2 = \sigma_{0,2}^2 + \sigma_{2,3}^2 + \sigma_{3,4}^2 + \sigma_{4,5}^2 + \sigma_{5,6}^2 + \sigma_{6,9}^2 + \sigma_{9,10}^2 = 131$, то $P\{t_{10} \le \theta_{10}\} = 0.73$.

Можно решить и обратную задачу: выяснить, к какому сроку проект будет завершён с необходимой большой вероятностью, скажем 0,95. Ответ: $\theta'_n = 117$ дней.

6. Многокритериальная оптимизация

Задача многокритериальной оптимизации – это задача с несколькими критериями (целевыми функциями), которые с разных сторон характеризует различные возможные варианты, стратегии, планы, решения $\vec{x}$. Обычно заранее ясно, что по каждому критерию лучше (например, «больше»). Эти несколько критериев $F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), ..., F_s(\vec{x})$ объединяют в векторный критерий

$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ ... \\ F_s(\vec{x}) \end{pmatrix}$, $\vec{x} \in M$, где M – допустимое множество решений. И желательно, например, $F_i(\vec{x}) \to \max\limits_{\vec{x} \in M}$, $i = 1, ..., s$ – задача многокритериальной оптимизации.

Пример 6.1

Располагая суммой денег b, вы собираетесь сделать запас продуктов $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, где x_1 – мука, кг, по цене c_1, x_2 – сахар, кг, по цене c_2. Цель – произвести больше булок, пусть их выход: $F_1(\vec{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max$, и сахарной ваты, пусть её выход: $F_2(\vec{x}) = x_2^2 \to \max$. Очевидно, $M = \{\vec{x} : c_1x_1 + c_2x_2 \le b,\ x_1, x_2 \ge 0\}$.

Если решить задачи с отдельными критериями $F_1(\vec{x})$ и $F_2(\vec{x})$, то их оптимальные точки различны: $\vec{x}^{*1} = \begin{pmatrix} \frac{b}{c_1} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{*2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{c_2} \end{pmatrix}$. Т. е. единого решения, обращающего оба критерия в максимум, не существует. Это обычная ситуация, поэтому используется обобщение оптимального решения.

Стратегия $\vec{x}^* \in M$ *называется эффективной (оптимальной по Парето)*, если не существует такой стратегии $\vec{x} \in M$, такой, что $F_i(\vec{x}) \ge F_i(\vec{x}^*), i = 1, ..., s$, причём $\vec{F}(\vec{x}) \ne \vec{F}(\vec{x}^*)$.

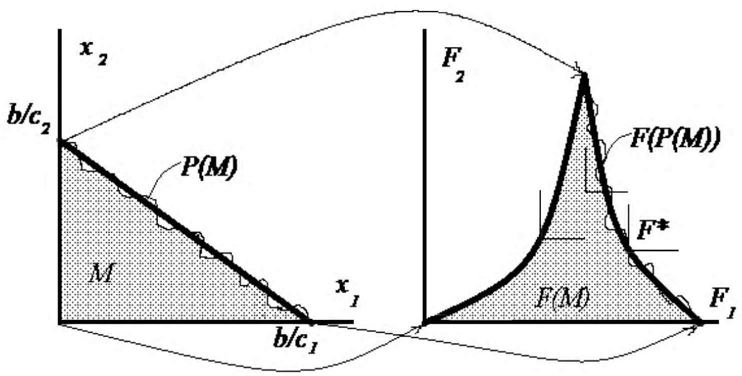
Другими словами, она эффективна, если не существует не уступающей ни в чём, а в чём-то даже лучшей стратегии. Или, кратко, если нет заведомо лучших точек (стратегий).

Множество всех эффективных стратегий (паретовское множество) обозначается $P(M) \subset M$.

Образ допустимого множества при отображении $\vec{F}(.)$ называется *критериальным множеством* $\vec{F}(M)$. Образ эффективного множества стратегий обозначается $\vec{F}(P(M))$ и называется *эффективная граница* (множество эффективных векторов критерия).

Пример 6.1 (продолжение)

Найдём множество эффективных стратегий. Для этого сначала построим критериальное множество, затем в нём найдём эффективную границу и, как её прообраз, паретовское множество (см. рисунок). Видно, что прообраз точки $\vec{F}*$ неулучшаем, так как в критериальном пространстве нет образов с лучшими значениями критериев (в указанном секторе). Поэтому $\vec{F}*$ принадлежит эффективной границе. С двумя другими точками на графике ситуация другая. Так находятся $\vec{F}(P(M))$ – правая дуга и $P(M)$ – гипотенуза треугольника.

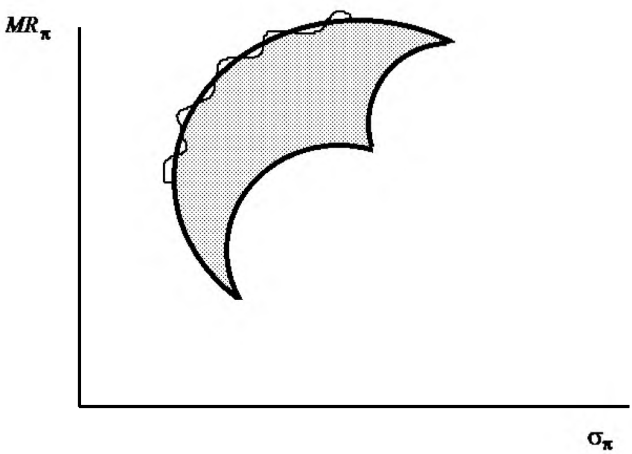


Т. о. делать закупки вне $P(M) = \{\vec{x} : c_1 x_1 + c_2 x_2 = b,\ x_1, x_2 \geq 0\}$ не эффективно. Стратегии из $P(M)$ не уступают друг другу, и дальнейший, окончательный выбор делается из дополнительных соображений.

Пример 6.2

Задача выбора инвестиционного портфеля: найти портфель $\vec{x}$, обеспечивающий $F_1(\vec{x}) = \sigma_\pi = \sqrt{DR_\pi} \to \min$ (наименьший риск) и $F_2(\vec{x}) = MR_\pi \to \max$ (наибольшую доходность).

Можно показать, что критериальное множество имеет вид (заштрихованная область на рисунке). Тогда очевидна эффективная граница (волнистая линия).



Решая задачу Марковица (см. п. 2.1) для различных r_0, можно построить эффективную границу и найти множество эффективных портфелей.

6.1. Упорядоченные критерии

Если критерии отличаются по важности (пусть уже произведено переобозначение: F_1 – самый важный и т.д.), то открываются следующие возможности выработки единственного оптимального решения.

Лексикографический максимум векторного критерия

Будем говорить, что стратегия $\vec{x}^i \geq \text{lex}\, \vec{x}^j$ – лексикографически лучше стратегии $\vec{x}^j$, если первая ненулевая компонента вектора $\vec{F}(\vec{x}^i) - \vec{F}(\vec{x}^j)$ положительна. Т.е. стратегия $\vec{x}^i$ предпочтительнее по наиболее важному критерию.

Если просто просчитать $\vec{F}(\vec{x})$ для всех $\vec{x}$, то далее их следует лексикографически упорядочить и $\vec{x}^* = \text{lex}\max_{\vec{x}} F(\vec{x})$.

Название лексикографический дано потому, что стратегии упорядочиваются как слова в словаре, прежде всего по первой букве, а если первые одинаковы, то по второй и так далее.

Пример 6.3

Стратегии	Критерии			
	F_1	F_2	F_3	F_4
$\vec{x}^1$	20	10	15	30
$\vec{x}^2$	20	10	11	35
$\vec{x}^3$	20	14	15	40
$\vec{x}^4$	15	16	16	25
$\vec{x}^5$	10	18	20	30

Ясно, что $\vec{x}^1 \geq \text{lex}\, \vec{x}^2$ т. к. $\vec{F}(\vec{x}^1) - \vec{F}(\vec{x}^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. Окончательно

$\vec{x}^3 \geq \text{lex}\, \vec{x}^1 \geq \text{lex}\, \vec{x}^2 \geq \text{lex}\, \vec{x}^4 \geq \text{lex}\, \vec{x}^5$ и $\vec{x}^* = \vec{x}^3$.

Метод последовательных уступок

- Решаем оптимизационную задачу с единственным (важнейшим) критерием F_1, считая, что других нет. Находим экстремальное значение F_1^{opt}.

- Для F_1 задаём порог, близкий F_1^{opt}, который не должен нарушаться. Это условие нерушимости порога, например, $F_1(\vec{x}) \geq 0.9F_1^{\max}$, добавляем к имеющимся ограничениям и решаем оптимизационную задачу только для второго по важности критерия. Находим экстремальное значение F_2^{opt}.
- Для F_2 задаём порог, включаем в ограничения и решаем оптимизационную задачу для третьего по важности критерия. И т. д.

Пример 6.4

Применим метод последовательных уступок в задаче выбора инвестиционного портфеля (см. пример 6.2). Если важнейшим критерием считать ожидаемую доходность, то получим задачу Марковица.

6.2. Свёртка векторного критерия

Свёртка векторного критерия – математическое объединение компонент векторного критерия в один скалярный критерий. Свёртка может быть проведена различными способами.

Взвешенная сумма

$$f(\vec{x}) = w_1F_1(\vec{x}) + w_2F_2(\vec{x}) + \ldots + w_sF_s(\vec{x});$$

$$w_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{s} w_i = 1,$$

где w_i – относительные важности (веса) различных критериев. Ясно, что $\tilde{F}_i(\vec{x})$ – исходные критерии – должны быть предварительно приведены к одному масштабу и единицам измерения (стандартизованы).

$$F_i(\vec{x}) = \frac{\left|\tilde{F}_i(\vec{x}) - \tilde{F}_i^{\text{opt}}\right|}{\tilde{F}_i^{\max} - \tilde{F}_i^{\min}}, \tag{26}$$

где $\tilde{F}_i^{\max,\min,\text{opt}}$ – значения в задаче с i-м критерием только. Далее решается однокритериальная задача

$$f(\vec{x}) \to \min_{\vec{x} \in M}.$$

Метод равномерной уступки Чебышёва (минимаксный критерий)

П. Л. Чебышёв предложил достичь равного (по возможности) отклонения от оптимальных значений по всем критериям:

$$f(\vec{x}) = \max_{i=1,s}\{F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), ..., F_s(\vec{x})\} \to \min_{\vec{x}\in M},$$

где $F_i(\vec{x})$ обязательно стандартизованы по формуле (26).

Пример 6.5

Предприятие выпускает компьютеры видов А и Б. Его возможности и характеристики продукции приведены в таблице

	Фонд рабочего времени	А (1 шт)	Б (1 шт)
Цех монтажа, ч.	50	5	1
Цех испытаний, ч.	26	2	1
Прибыль, тыс. руб.	–	9	3
Цена, тыс. руб.	–	20	30
Прямые материальные затраты, тыс. руб.	–	4	3
Стоимость основных производственных фондов 100 тыс. руб.			

Компьютеры Б снабжены комплектующими не более, чем на 20 штук.

Найти методом равномерной уступки Чебышёва оптимальный план выпуска x_1, x_2, шт., по критериям максимальной прибыли и фондоотдачи.

$$\tilde{F}_1(\vec{x}) = 9x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\tilde{F}_2(\vec{x}) = \frac{доход}{основные\,фонды + ПМЗ} = \frac{20x_1 + 30x_2}{100 + 4x_1 + 3x_2} \to \max;$$

$$M: \begin{cases} 5x_1 + x_2 \le 50 \\ 2x_1 + x_2 \le 26 \\ x_2 \le 20 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Если решить задачу только с первым критерием (задача линейного программирования), то $\tilde{F}_1^{\max} = 102$, $\tilde{F}_1^{\min} = 0$, $\tilde{F}_1^{opt} = 102$, если только со вторым (задача дробно-линейного программирования), то $\tilde{F}_2^{\max} = 3.837$, $\tilde{F}_2^{\min} = 0$, $\tilde{F}_2^{opt} = 3.837$. Поэтому

$$f(\vec{x}) = \max\left\{\frac{102 - 9x_1 - 3x_2}{102 - 0}, \frac{3.837 - \dfrac{20x_1 + 30x_2}{100 + 4x_1 + 3x_2}}{3.837 - 0}\right\} \to \min.$$ Решение, полученное в *MathCAD*: $\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 4,85 \\ 16,299 \end{pmatrix}$; $f_{opt} = 0.093$ $(= F_1(\vec{x}^*) = F_2(\vec{x}^*))$.

Упражнения

Упражнение 6.1

Построить критериальное множество $\vec{F}(M)$ в примере 6.1.

Упражнение 6.2

Найти $\vec{F}(M)$, $\vec{F}(P(M))$, $P(M)$, если

$M = \left[0, (3 + \sqrt{13}) / 4\right]$, $\vec{F} = (x, x^3 - 3x^2 + 2x)^T \to \max$.

Упражнение 6.3

Придумать (изобразить на графике) ситуацию $r = 2$, $s = 2$, когда возможно одновременное обращение критериев в *max*.

Упражнение 6.4

Пусть в задаче векторной оптимизации есть две целевые функции. И пусть $\vec{x}^*$– решение задачи скалярной оптимизации, когда единая целевая функция есть взвешенная сумма исходных двух. Доказать, что $\vec{x}^*$ эффективен. Дать геометрическую интерпретацию в критериальном пространстве. Показать, что множество всех решений указанной скалярной задачи оптимизации с фиксированными весами не включает все эффективные точки.

Упражнение 6.5

Найти множество эффективных портфелей двух активов (a_1 = 5%, a_2 = 15%, σ_1 = 20%, σ_2 = 40%) в случаях: а) $\rho = -1$; б) $\rho = 1$; в) $\rho = 0$.

Упражнение 6.6

Имеется 2 актива: со средней доходностью 20 % и дисперсией 5 $(\%)^2$, другой 50 % и 15 $(\%)^2$. Ковариация = 5 $(\%)^2$. На плоскости средний доход – дисперсия найти геометрическое место эффективных портфелей. Проделать это же для ковариаций = -8; -2; 0; 3 $(\%)^2$.

Упражнение 6.7

Найти лексикографический максимум векторного критерия при ограничениях:

$$\vec{F} = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 13 \\ x_i \ge 0, \text{ целые} \end{cases}.$$

Упражнение 6.8

Применить метод последовательных уступок в примере 6.16 а) важнейший критерий – второй, уступить не более 50%; б) важнейший критерий – первый, уступить не более 50%.

Упражнение 6.9

Продолжение *упр.* 1.3. Добавить ещё два критерия: количество «*Smirnoff*» и аперитива -> *min*: а) применить взвешенную сумму с весами (0,4; 0,5; ?); б) применить метод равномерной уступки Чебышёва; в) потребовать равенства критериев в методе равномерной уступки Чебышёва.

7. Лабораторный практикум

(выполняется с использованием программ *MathCAD,* ПЭР)

Упражнение 7.1

Найти решение в примере 1.3. Дать развёрнутый ответ: в моменты $k = 0, 1, 2, 3$, где и сколько денег взять и куда и сколько вложить (в *MathCAD*, общее для всех).

Упражнение 7.2

Для рытья котлована объёмом a м^3 строители получили 3 экскаватора. Мощный, производительностью 22,5 м^3/час с расходом топлива 10 л/час; средний с характеристиками 10 м^3/час и b л/час; малый - 5 м^3/час и 2 л/час. Экскаваторы могут работать вместе, не мешая друг другу. Запас топлива c, л. Каким образом следует использовать технику, чтобы выполнить работу как можно скорее? (в *MathCAD* побригадно).

Вариант	a	b	c
1	1350	10/3	548
2	1080	4	460
3	1080	11/3	444
4	1440	10/3	580
5	1140	4	480
6	1350	11/3	552
7	1620	10/3	656
8	2160	11/3	888
9	1200	4	500
10	1320	4	550
11	1890	11/3	777
12	1200	4	510
13	1800	10/3	728
14	1380	4	580
15	1620	11/3	666

Упражнение 7.3

Строителям требуются комплекты досок, каждый из которых состоит из a досок длиной 1.5 м, и b досок длиной 0.6 м. Как следует распилить c четырёхметровых досок, чтобы получить наибольшее количество указанных комплектов? (в *MathCAD* побригадно)

Вариант	a	b	c
1	1	3	660
2	1	3	720
3	1	3	780
4	1	3	840
5	2	5	660
6	2	5	770
7	2	5	880
8	2	5	990
9	3	7	640
10	3	7	800
11	3	7	960
12	3	8	510
13	3	8	680
14	3	8	850
15	4	9	600

Упражнение 7.4

В городе строятся 3 объекта. Суточное потребление бетона ими B_1, B_2, B_3. Есть два поставщика бетона с производством A_1, A_2. На перекрестиях таблицы указана стоимость доставки 1 тонны бетона от каждого поставщика каждому потребителю. Составить оптимальный план перевозок.

1. Решить задачу с заданными условиями.

2. Увеличив производство одного из поставщиков на 10 %, сделать задачу открытой. Подобрать вариант, у какого поставщика это лучше сделать. Составить оптимальный план перевозок. Дать объяснение результата (в ПЭР, побригадно).

		Вариант 1		
		B_1	B_2	B_3
		100	140	110
A_1	160	1	2	3
A_2	190	2	2	1

		Вариант 2		
		B_1	B_2	B_3
		150	230	170
A_1	250	1	4	2
A_2	300	2	3	3

		Вариант 3		
		B_1	B_2	B_3
		100	180	120
A_1	180	1	3	5
A_2	220	3	4	2

		Вариант 4		
		B_1	B_2	B_3
		210	300	180
A_1	110	3	5	4
A_2	580	6	4	2

		Вариант 5		
		B_1	B_2	B_3
		100	140	110
A_1	200	2	4	6
A_2	150	4	5	3

		Вариант 6		
		B_1	B_2	B_3
		400	560	440
A_1	760	8	12	4
A_2	640	10	6	8

		Вариант 7		
		B_1	B_2	B_3
		180	260	200
A_1	340	2	3	8
A_2	300	4	6	1

		Вариант 8		
		B_1	B_2	B_3
		500	700	550
A_1	1050	10	15	5
A_2	700	12,5	7,5	10

		Вариант 9		
		B_1	B_2	B_3
		180	270	210
A_1	450	1	2	3
A_2	210	2	3	2

		Вариант 10		
		B_1	B_2	B_3
		100	160	130
A_1	160	1	2	3
A_2	230	2	2.5	1.5
		B_1	B_2	B_3
		Вариант 11		
		100	120	180
A_1	160	1	3	5
A_2	240	3	4	2

		Вариант 12		
		B_1	B_2	B_3
		180	260	200
A_1	340	2	3	8
A_2	300	4	6	1

		Вариант 13		
		B_1	B_2	B_3
		500	700	550
A_1	950	10	15	5
A_2	800	12,5	7,5	10

		Вариант 14		
		B_1	B_2	B_3
		250	280	210
A_1	350	3	5	6
A_2	390	4	6	2

		Вариант 15		
		B_1	B_2	B_3
		280	220	370
A_1	370	2	3	8
A_2	500	4	6	5

Упражнение 7.5

Найти решение в примере 1.4 (в ПЭР, общее для всех).

Упражнение 7.6

Решить задачу о назначениях на поиск максимума суммарной производительности непосредственно и через переход к поиску минимума (в ПЭР, общее для всех).

$d =$

7	5	0	3
2	7	1	4
1	3	6	8
5	4	3	2

Упражнение 7.7

Повторить пример 2.1 (S = 100). Проверить найденное решение точными формулами, найти угол альфа, найти минимальную длину смачивания (в *MathCAD* общее для всех).

Упражнение 7.8

Повторить пример 2.2 (в *MathCAD* общее для всех).

Упражнение 7.9

Повторить пример 2.3: найти процент инвестированных средств, ожидаемое значение и стандартное отклонение рентабельности портфеля.

Продолжить задачу на случай полного инвестирования средств, где найти ещё ожидаемую рентабельность портфеля (в *MathCAD* общее для всех).

Упражнение 7.10

Решить задачу квадратичного программирования (в *MathCAD* по бригадам):

1

$f = x_1+4x_2+x_1x_2–2x12–2x22 \rightarrow$max

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 12 \\ 3x_1+x_2\le 15 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

2

$f = -x_1–x_2–x_1x_2+x_1^2+x_2^2 \rightarrow$max

$$\begin{cases} x_1+x_2\le 3 \\ x_2\ge 2 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

3

$f = 2x_1+4x_2–x_1^2–2x_2^2 \rightarrow$ max

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 8 \\ 2x_1–x_2\le 12 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

4

$f = 6x_2+6x_3–x_1^2–x_2^2–x_3^2 \rightarrow$ max

$$\begin{cases} x_1+ 2x_2+x_3\le 6 \\ 2x_1+x_2+x_3\le 6 \\ x_3\le 3 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$$

5

$f = 4x_1+10x_2–x_1^2–x_2^2 \rightarrow$max

$$\begin{cases} x_1+x_2\le 4 \\ x_2\le 2 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

6

$f = –x_1^2–x_2^2 \rightarrow$max

$$\begin{cases} x_1+0{,}5x_2\ge 1 \\ x_1+0{,}5x_2\le 4 \\ x_1+x_2\le 6 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

7

$f = –x_1–x_2–x_1x_2+x_1^2+x_2^2 \rightarrow$min

$$\begin{cases} x_1+x_2\le 3 \\ \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

8

$f = 6x_1+x_2-x_1^2–9 \rightarrow$ max

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 24 \\ x_1+2x_2\le 15 \\ 3x_1+2x_2\le 24 \\ x_2\le 4 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

9

$f = x_1+8x_2-x_1^2-x_2^2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1+x_2\leq 7 \\ x_2\leq 5 \\ x_1,x_2\geq 0 \end{cases}$$

10

$f = -2x_1+8x_2-x_1^2-x_2^2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\leq 12 \\ -x_1+x_2\geq -8 \\ x_1,x_2\geq 0 \end{cases}$$

11

$f = 2x_2+3x_3-x_1^2-x_2^2-2x_3^2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3\leq 18 \\ x_1+2x_3\leq 14 \\ x_2\leq 12 \\ x_1,x_2,x_3\geq 0 \end{cases}$$

12

$f = x_1+2x_2-0,5x_1^2-0,5x_2^2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\leq 6 \\ x_1+4x_2\leq 5 \\ x_1,x_2\geq 0 \end{cases}$$

8. Индивидуальная самостоятельная работа (типовой расчёт)

Задача 8.1

Прядильная фабрика для производства двух видов пряжи использует три типа сырья – чистую шерсть, капрон и акрил. В таблице указаны нормы расхода сырья, его общее количество, которое может быть использовано фабрикой в течение года, и прибыль от реализации тонны пряжи каждого вида.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на 1 т пряжи, т		Количество сырья, т
	Вид 1	Вид 2	
Шерсть Капрон Акрил	0,5 a $0,5 - a$	0,2 0,6 0,2	600 b c
Прибыль от реализации 1 т пряжи, руб.	1100	900	–

Требуется составить годовой план производства пряжи с целью максимизации суммарной прибыли.

Варианты заданий:

	a b c		*a b c*		*a b c*		*a b c*
1	0,1 620 500	6	0,1 870 510	11	0,2 710 400	16	0,3 690 300
2	0,1 730 500	7	0,1 790 520	12	0,2 880 410	17	0,3 720 300
3	0,1 840 500	8	0,2 920 400	13	0,2 810 410	18	0,3 750 300
4	0,1 650 510	9	0,2 850 400	14	0,2 740 410	19	0,3 780 300
5	0,1 760 510	10	0,2 780 400	15	0,3 660 300	20	0,3 800 300

Задача 8.2

Решить симплекс-методом следующую задачу ЛП, начав с указанной вершины допустимого множества:

$ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max;$

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = b;$

$x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = c;$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 5;$

$x^0 = (0, 0, (b–7c)/5, c, 0)^T.$

Варианты заданий:

Ва-ри-ант	a	b	c	Ва-ри-ант	a	b	c	Ва-ри-ант	a	b	c	Ва-ри-ант	a	b	c
1	2	8	1	6	3	32	4	11	4	15	2	16	5	22	3
2	1	9	1	7	2	33	4	12	2	16	2	17	1	23	3
3	5	10	1	8	1	34	4	13	3	17	2	18	4	24	3
4	4	11	1	9	5	35	4	14	5	18	2	19	3	25	3
5	3	12	1	10	4	36	4	15	1	19	2	20	2	26	3

Задача 8.3

Решить в *MathCAD* задачу ЛП:

$f = 5x_1 + 6x_2 + 13x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 5x_1 + (5-a)x_2 + (12-a)x_3 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_2 + x_3 \geq 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \geq 1 \\ bx_1 - (b+c)x_2 - cx_3 \leq -15 \end{cases}.$$

Варианты заданий:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	3	5	7	9	1	3	5	7	9
b	1	2	2	1	1	1	2	2	1	2
c	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3

Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	9	7	5	3	1	1	1	1	1	1
b	1	2	3	4	1	5	4	3	2	1
c	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1

Задача 8.4

Используя теорию двойственности и геометрические построения, найти решение следующей задачи ЛП:

$3ax_1 + 11x_2 + 5bx_3 + x_4 \to \min;$

$-3x_1 + x_2 + (2+b)x_3 - x_4 \geq c;$

$(2+a)x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 \geq 7;$

$x_j \geq 0; \quad j = 1, \ldots, 4.$

Варианты заданий:

Вари-ант	a b c	Вари-ант	a b c	Вари-ант	a b c	Вари-ант	a b c
1	1 1 4	6	2 1 1	11	3 1 3	16	4 1 2
2	1 2 1	7	2 2 3	12	3 2 2	17	4 2 4
3	1 3 3	8	2 3 2	13	3 3 4	18	4 3 1
4	1 4 2	9	2 4 4	14	3 4 1	19	4 4 3
5	1 5 4	10	2 5 1	15	3 5 3	20	4 5 2

Задача 8.5

Найти решение игры в смешанных стратегиях. Платёжная матрица:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

Варианты заданий:

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
A_{11}	0,2	0	0,2	0,2	2	5	0,2	0,3
A_{12}	0,5	3	0,7	0,5	3	4	0,8	0
A_{13}	0,8	9	0,5	0,9	11	8	0	0,9
A_{21}	0,8	6	0,6	0,7	7	1	0,1	0,8
A_{22}	0,9	1	0,1	0	5	9	0,9	0,4
A_{23}	0,6	8	0,8	0,1	2	5	0,6	0,1

№ варианта	9	10	11	12	13	14	15	16
A_{11}	2	1	7	0,1	0	3	0,8	0,1
A_{12}	3	10	1	0,5	4	7	0	0,7
A_{13}	6	9	2	0,8	7	0	0,8	0
A_{21}	8	6	5	0,7	5	5	0,2	0,8
A_{22}	6	2	9	0,3	3	4	0,7	0,3
A_{23}	5	5	1	0,2	1	6	0,4	0,5

№ варианта	17	18	19	20	21	22	23	24
A_{11}	0,4	0,4	7	0,9	0,8	0,7	0,8	0,8
A_{12}	0,8	0,2	4	0,8	0,5	0,1	0,2	0,1
A_{13}	0,2	0,5	5	0,2	0,1	0,5	0,5	0,6
A_{21}	0,1	0,3	3	0,4	0,2	0,6	0,1	0,5
A_{22}	0,5	0,9	8	0,6	0,3	0,9	0,9	0,9
A_{23}	0,7	0,2	2	0,9	0,9	0	0,4	0

Задача 8.6 (выполнить по бригадам)

Вариант 1

Два игрока поднимают одновременно один или два пальца, если число поднятых пальцев чётно, то первый платит второму, и если нечётно, то второй платит первому сумму, равную общему числу поднятых пальцев. Каковы оптимальные стратегии игроков? Какова цена игры? Является ли игра справедливой?

Вариант 2

Швейная фабрика выпускает детские платья и костюмы, сбыт которых зависит от состояния погоды. Затраты фабрики в течение апреля – мая на единицу продукции составили: платья – 8 руб., костюмы – 27 руб., а цена реализации равняется соответственно 16 и 48 руб. По данным наблюдений за прошлые периоды, фабрика может реализовать в течение этих месяцев в условиях теплой погоды 600 костюмов и 1975 платьев, а при прохладной погоде – 625 платьев и 1000 костюмов. Сколько следует выпускать костюмов и платьев с целью максимизации средней величины прибыли от реализованной продукции, и какова эта прибыль?

Вариант 3

Разрабатываются устройства для предотвращения запуска двигателя автомашины посторонними лицами. Принцип действия их такой: имитируется неисправность в одном из звеньев системы запуска. Созданы три образца устройств A_1, A_2, A_3 блокирующих соответственно звенья /, // и ///. Цель установки устройства считается достигнутой, если постороннее лицо в течение определенного времени не сможет запустить двигатель. Произведены испытания: «посторонним» лицам предлагалось за кратчайший срок запустить двигатель автомашины, оборудованной одним из устройств.

Выяснилось, что процент неудачных попыток запуска двигателя, зависит только от того, какое из звеньев системы запуска /, // или /// пытаются восстановить первым ($Б_1$, $Б_2$, $Б_3$):

	$Б_1$	$Б_2$	$Б_3$
A_1	90	95	99
A_2	90	99	90
A_3	99	85	85

Спрашивается, какие из созданных устройств пускать в серийное производство? Каков будет (минимальный?) средний процент неудачных попыток запуска двигателя?

Вариант 4

Требуется внедрить в массовое производство изделие, которое должно удовлетворительно функционировать в трех различных условиях: A_1, A_2 и A_3 . При этом изготовитель изделия (так же, как и заказчик) заинтересован в том, чтобы кроме удовлетворения определенным техническим требованиям готовые образцы изделия были наиболее экономичны в процессе их эксплуатации. Предлагается для внедрения два варианта изделия: $Б_1$ и $Б_2$. Данные о предполагаемых эксплуатационных расходах для обоих вариантов в различных условиях сведены в таблице.

	$Б_1$	$Б_2$
$А_1$	150	100
$А_2$	90	120
$А_3$	75	80

Никаких сведений о том, какую долю времени изделия будут эксплуатироваться в тех или иных условиях, нет. И в то же время требуется определить, в какой пропорции выпускать предлагаемые варианты изделия в первой серийной партии продукции. Каковы (максимальные?) средние эксплуатационные расходы?

Вариант 5

Обувная фабрика планирует выпуск трёх моделей обуви *A*, *B* и *C*. Спрос на эти модели не определен, однако можно предположить, что он может принимать одно из двух состояний (*I* и *II*). В зависимости от этих состояний прибыль предприятия различна и определяется матрицей

3	7
4	6
5	4

Найдите оптимальное соотношение между объемами выпуска каждой из моделей, при котором предприятию гарантируется средняя величина прибыли при любом состоянии спроса, и эту среднюю прибыль.

Вариант 6

Пусть двое игроков, одновременно и не зная выбора противника, кладут на стол по монете. При совпадении сторон обе монеты забирает первый игрок, при несовпадении обе монеты забирает второй игрок. У каждого из игроков по две стратегии $\{Г, Р\}$ и $\{Г, Р\}$. Пусть выигрыш первого игрока (+1), его проигрыш (-1). Какова оптимальная стратегия первого игрока? Что можно сказать о его среднем выигрыше при этом?

Вариант 7

В город можно войти только по двум мостам. Город обороняют 3 роты, на город нападают 2 роты, город будет взят, если на одном из мостов наступающие окажутся в численном превосходстве. Надо построить матрицу игры для обороняющихся, считая, что успешная оборона дает выигрыш (+1), потеря города дает (-1). Стратегии первого игрока таковы: выделить на защиту первого моста 0, 1, 2, 3-ю роты (остальные отправить защищать второй мост); стратегии второго игрока: атаковать первый мост силами 0, 1, 2-й рот (остальные отправить атаковать второй мост). Как оборонять город? Каков будет (наименьший?) средний выигрыш?

Вариант 8

На один и тот же рынок первая фирма может поставлять какие-то три своих продукта $а_1$, $а_2$, $а_3$, вторая – четыре продукта $б_1$, $б_2$, $б_3$, $б_4$. Платёжная матрица для первой фирмы имеет вид:

-5	-1	1	20
18	-2	4	6
1	-2	1	-5

Элементы матрицы – размер выигрыша 1-й фирмы для всех сочетаний продуктов обеих фирм. Какие продукты поставлять на рынок 1-й фирме? Что можно сказать о её среднем выигрыше при этом?

Вариант 9

Предположим, есть две фирмы A и B, торгующие одним и тем же товаром, который пользуется спросом в течение 4 единиц времени. Пусть c – доход от продажи товара в единицу времени, причем продажа товара по заниженной цене законодательно запрещена. Далее пусть качество товара зависит от времени поступления на рынок: чем позже товар появляется на рынке, тем качество выше, причем реализуется только товар более высокого качества. Наконец, пусть фирма B хочет разорить фирму A, не заботясь о своих доходах. Фирма B может использовать в качестве законного средства только момент поступления своего товара на рынок. Пусть i – момент поступления товара на рынок от фирмы A, j – момент поступления товара от фирмы B, выбор моментов – единственно возможные управленческие решения. В чем заключается оптимальная стратегия фирмы A и каков будет её доход?

Вариант 10

Магазин может завезти товар 5 типов (i = 1, ..., 5, i – номер типа товара). Если товар будет пользоваться спросом, то прибыль от его реализации будет p_i, если товар не будет пользоваться спросом, то убыток составит l_i. Прогноз спроса отсутствует. Первый игрок – магазин, второй – покупательский спрос, который играет роль «природного фактора», а не разумного противника. Товары считаются такими, что спрос на один из них означает отсутствие спроса на другие.

i	p_i	l_i
1	32	16
2	32	8
3	32	4
4	32	4
5	32	2

Какие товары завозить? Какова будет (минимальная?) средняя прибыль?

Вариант 11

Предприятие выпускает обогреватели и кондиционеры, сбыт которых зависит от состояния погоды. По данным прошлых наблюдений предприятие в теплую погоду реализует 1000 обогревателей и 6000 кондиционеров; в холодную погоду – 4000 обогревателей и 1200 кондиционеров за месяц. Себестоимость обогревателя 8 руб./шт.; кондиционера 5 руб./шт. Цена обогревателя в месяц изготовления 12 руб./шт.; позже – 3 руб./шт. Цена кондиционера в месяц изготовления 8 руб./шт.; позже – 2 руб./шт. На реализацию всей продукции расходуется 2000 руб. в месяц.

Считая чистыми стратегиями предприятия ориентацию на тёплую или холодную погоду, определить оптимальный выпуск продукции в предстоящем месяце, обеспечивающий при любой погоде наибольшую прибыль и величину этой прибыли.

Задача 8.7

Условие и задание примера 3.2. Распределение спроса (в тоннах) изучалось при различных x. Были получены следующие данные.

Спрос, т	Частота
0–4	0.1*((5/3) – x)
4–8	0.3*((5/3) – x)
8–16	0.08
16–20	0.1*(3 – (5/3) + x)
20–24	0.3*x
24–28	0.07
28–32	0.03
32–36	0.02

Вариант	k_1	k_2	x
1	2	3	4
1	0,8	0,7	0
2	0,8	0,1	0
3	0,8	0,4	0
4	1	1,5	0
5	0,8	0,7	0,4
6	0,8	0,1	0,4
7	0,8	0,4	0,4
8	1	1,5	0,4
9	0,8	0,7	0,6
10	0,8	0,1	0,6
11	0,8	0,4	0,6
12	1	1,5	0,6
13	0,8	0,7	0,8
14	0,8	0,1	0,8
15	0,8	0,4	0,8
16	1	1,5	0,8
17	0,8	0,7	1
18	0,8	0,1	1
19	0,8	0,4	1

1	2	3	4
20	1	1,5	1
21	0.8	0.7	1.2
22	0.8	0.1	1.2
23	0.8	0.4	1.2
24	1	1.5	1.2
25	0.8	0.7	1.4
26	0.8	0.1	1.4
27	0.8	0.4	1.4
28	1	1.5	1.4

Задача 8.8

Предприятие производит, хранит и отпускает потребителям некоторые изделия. Для каждого периода известны: потребность (отпуск) единиц изделий, максимальная производственная мощность единиц изделий, максимальная мощность (ёмкость) хранения единиц изделий, установочная цена – затраты на подготовку производства (не зависит от объёма производства, но равна 0 при нулевом производстве) условных денежных единиц (у. е.), цена производства единицы изделия в у. е., цена хранения единицы изделия в у. е. Храниться должны все изделия, перешедшие из предшествующего периода или произведённые в текущем периоде, за вычетом расходуемых в текущем периоде. Найти оптимальный вариант распределения производства по периодам, обеспечивающий все потребности и характеризуемый наименьшими суммарными затратами на производство и хранение.

Вариант	Начальный запас	Период	Потреб требность	Производственная мощность	Мощность хранения	Установочная цена	Цена производства единицы	Цена хранения единицы
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	3	5	1	10	1	0.5
		2	2	3	2	10	2	0.4
		3	1	2	5	10	3	0.3
		4	3	3	2	12	4	1
2	0	1	3	5	1	10	1	0.5
		2	2	3	2	10	2	0.4
		3	1	2	5	10	3	0.3
		4	3	3	2	12	4	1
		5	2	1	1	12	3	1
3	0	1	3	5	3	11	2	0.5
		2	2	3	2	10	2	0.4
		3	1	2	5	10	3	0.3
		4	3	3	2	12	4	1
		5	2	1	1	12	3	1
4	0	1	3	5	3	11	2	0.5
		2	2	3	2	10	2	0.4
		3	2	2	4	10	5	1
		4	3	3	2	12	4	1
		5	2	1	1	12	3	1
5	0	1	3	5	3	11	2	0.5
		2	3	3	2	10	3	2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
		3	2	2	4	10	5	1
		4	3	3	2	12	4	1
		5	2	1	1	12	3	1
6	0	1	3	5	3	11	2	0,5
		2	3	3	2	10	3	2
		3	2	3	2	10	4	1
		4	3	3	2	12	4	1
		5	2	1	1	12	3	1
7	0	1	3	5	3	11	2	0,5
		2	2	4	3	10	3	2
		3	2	3	2	10	4	1
		4	3	3	2	12	4	1
		5	2	1	1	12	3	1
8	2	1	3	5	3	11	2	0,5
		2	2	4	3	10	3	2
		3	2	3	2	10	4	1
		4	3	3	2	12	4	1
		5	2	1	1	12	3	1
9	2	1	3	5	3	11	2	0,5
		2	2	4	3	10	3	2
		3	3	4	4	13	4	1
		4	3	3	2	12	4	1
		5	2	1	1	12	3	1
10	0	1	3	5	3	11	2	0,5
		2	2	4	3	10	3	2
		3	3	4	4	13	4	1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
		4	3	3	2	12	4	1
		5	2	1	1	12	3	1
11	1	1	3	5	3	11	2	0,5
		2	2	4	3	10	3	2
		3	3	4	4	13	4	1
		4	3	3	2	12	4	1
		5	2	1	1	12	3	1
12	1	1	3	5	3	11	2	2
		2	3	4	3	10	3	1
		3	3	4	4	14	5	1
		4	3	3	2	12	4	1
		5	2	1	1	12	3	1
13	0	1	3	5	3	11	2	2
		2	3	4	3	10	3	1
		3	3	4	4	14	5	1
		4	3	3	2	12	4	1
		5	2	1	1	12	3	1
14	2	1	3	5	3	11	2	2
		2	3	4	3	10	3	1
		3	3	4	4	14	5	1
		4	4	2	3	12	5	2
		5	2	1	1	12	3	1
15	0	1	3	5	3	11	2	2
		2	3	4	3	10	3	1
		3	3	4	4	14	5	3
		4	4	3	3	12	4	2
		5	2	1	1	12	3	1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	0	1	3	5	3	11	2	2
		2	3	6	3	11	4	1
		3	3	4	4	14	5	3
		4	4	3	3	12	4	2
		5	2	1	1	12	3	1
17	0	1	3	5	3	12	4	2
		2	3	7	4	10	3	1
		3	3	4	4	14	5	3
		4	4	3	3	12	4	2
		5	2	1	1	12	3	1
18	2	1	3	5	3	12	4	2
		2	3	7	4	10	3	1
		3	3	4	4	14	5	3
		4	4	3	3	12	4	2
		5	2	1	1	12	3	1
19	0	1	3	5	3	12	4	2
		2	3	7	6	10	4	1
		3	3	4	4	14	6	1
		4	4	3	3	14	5	2
		5	2	1	1	12	3	1
20	2	1	3	5	3	12	4	2
		2	3	7	6	10	4	1
		3	3	4	4	14	6	1
		4	4	3	3	14	5	2
		5	2	1	1	12	3	1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
21	2	1	3	5	3	12	4	2
		2	4	6	5	11	5	1
		3	3	4	4	14	6	1
		4	4	3	3	14	5	2
		5	2	1	1	12	3	1
22	0	1	3	5	3	12	4	2
		2	4	6	5	11	5	1
		3	3	4	4	14	6	1
		4	4	3	3	14	5	2
		5	2	1	1	12	3	1
23	0	1	3	5	3	12	4	2
		2	4	6	5	11	5	1
		3	4	3	3	14	5	2
		4	2	1	1	12	3	1
24	1	1	3	5	3	12	4	2
		2	4	6	5	11	5	1
		3	4	3	3	14	5	2
		4	2	1	1	12	3	1
25	1	1	3	5	3	12	4	2
		2	4	6	5	11	5	1
		3	4	3	3	14	5	2
		4	2	2	1	12	3	1

Задача 8.9

Планируемый период разделён на 4 промежутка времени, в которых задан расход d^k, производимый в конце каждого из промежутков. Известны: начальный уровень запасов x^0 , конечный уровень запасов x^4, затраты на пополнение запасов в зависимости от размера партии u^k ($0<=u^k<= u_{max}$, целое):

$$\psi(u^k)=\begin{cases} u^k, & 0\le u^k\le 2 \\ 1{,}5u^k-1, & 2<u^k\le 5 \\ 2u^k-3{,}5; & 5<u^k\le u_{\max} \end{cases}$$

затраты на хранение в зависимости от среднего уровня хранимых запасов

$$\phi(\overline{x}^k)=0{,}8\overline{x}^k,\ \overline{x}^k=x^{k-1}+\frac{u^k}{2}.$$

Требуется определить размеры пополнения запасов в каждом промежутке, из условия минимума суммарных затрат за весь планируемый период и этот минимум.

Вариант	$d^1,\ldots,d^4$	x^0, x^4	u_{max}
1	2	3	4
1	3 2 7 10	1 0	8
2	3 2 7 10	1 2	8
3	3 2 7 10	0 0	8
4	3 2 7 10	0 2	8
5	3 8 2 10	1 0	8
6	3 8 2 10	1 2	8
7	3 8 2 10	0 0	8
8	3 8 2 10	0 2	8
9	6 3 10 4	1 0	8
10	6 3 10 4	1 2	8
11	6 3 10 4	0 0	8
12	6 3 10 4	0 2	8

1	2	3	4
13	8 3 5 10	1 0	8
14	8 3 5 10	1 2	8
15	8 3 5 10	3 0	8
16	8 3 5 10	1 3	8
17	6 0 5 8	1 0	7
18	6 0 5 8	2 3	7
19	6 0 5 8	2 1	7
20	6 0 5 8	4 2	7
21	2 5 6 8	0 0	7
22	2 5 6 8	1 0	7
23	2 5 6 8	0 2	7
24	2 5 6 3	6 0	7
25	2 5 6 3	1 3	7

Задача 8.10

Требуется распределить имеющийся объём капиталовложений R (сотни тыс. руб.) между тремя предприятиями с целью получения максимальной дополнительной прибыли, если прирост прибыли предприятий в зависимости от капиталовложений приведён в таблице.

Объём кап. вложний (сотни. тыс. руб.)	Прирост прибыли (тыс. руб.)		
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3
0	0	0	0
1	30	50	40
2	50	80	50
3	90	90	110
4	110	150	120
5	170	190	180
6	180	210	220
7	210	220	240

Капиталовложения должны быть кратны единице и для i-го предприятия находится в пределах $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, 3$.

Вариант	R	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
1	7	0	7	0	7	0	7
2	8	0	7	0	7	0	7
3	6	0	7	0	7	0	7
4	9	0	7	0	7	0	7
5	7	1	6	0	7	0	7
6	8	1	6	0	7	0	7
7	6	1	6	0	7	0	7
8	9	1	6	0	7	0	7
9	7	0	7	3	6	0	7
10	8	0	7	3	6	0	7
11	6	0	7	3	6	0	7
12	9	0	7	3	6	0	7
13	7	2	7	3	7	0	4
14	8	2	7	3	7	0	4
15	6	2	7	3	7	0	4
16	9	2	7	3	7	0	4
17	7	1	7	0	7	0	4
18	8	1	7	0	7	0	4
19	6	1	7	0	7	0	4
20	9	1	7	0	7	0	4
21	7	3	7	3	7	0	7
22	8	3	7	3	7	0	7
23	6	3	7	3	7	0	7
24	9	3	7	3	7	0	7
25	9	4	7	0	7	0	7

Задача 8.11 (выполнить по бригадам)

Вариант 1

Комплекс состоит из операций, обозначенных буквами *A, B,…, T*, для которых заданы следующие отношения порядка *(X, Y > W* означает, что *X* и *Y* нельзя начать, пока не закончена операция *W; W > X, Y* означает, что *W* нельзя начать, пока не закончены обе операции *X* и *Y): A, B, C* не имеют предшествующих; *D, E > A; F > B; G, H > D; I > F, G; J, К >* С*;* М, *L > J; N > К, L; O > M, N; P > H, I, O; R, Q > P; S >Q; T >R, S*. Постройте сетевой график этого комплекса и пронумеруйте события так, чтобы для любой операции (*i, j*) выполнялось условие $i < j$.

Найдите ранние и поздние сроки наступления всех событий при следующих продолжительностях операций:

Операция	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*
Продолжительность	5	9	14	4	3	10	6	12	10	3	4	5	5	8	18	3	6	13	5	7

Определите также ранние и поздние сроки окончания всех операций.

Вариант 2

При указанных ниже исходных данных вычислите следующие параметры сети:

а) ожидаемые продолжительности операций и их дисперсии;

б) ранние и поздние сроки наступления событий;

в) дисперсии ранних сроков событий;

г) ранние и поздние сроки окончания операций и дисперсии ранних сроков;

д) вероятности завершения каждой операции в директивный срок.

Операция	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*
Минимальная оценка	4	5	8	2	4	6	8	5	3	5	6
Максимальная оценка	8	10	12	7	10	15	16	9	7	11	13
Наиболее вероятная оценка	5	7	11	3	7	9	12	6	5	8	9
Директивный срок	7	18	16	6	26	20	25	30	30	48	50

Отношения следования: *A, C, D* не имеют предшествующих; *E > B, C; F, G, > D; H, I > E, F; J > I, G; K > H; B > A.*

Вариант 3

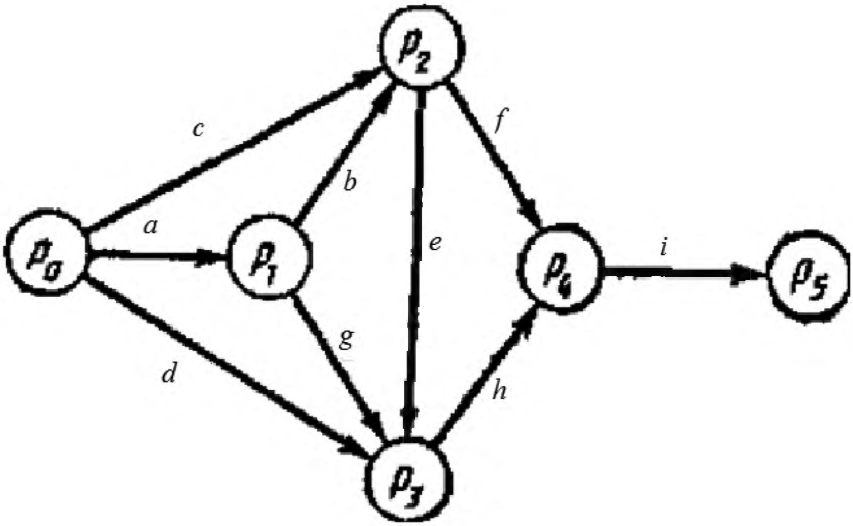
Пусть *t* – срок окончания комплекса при указанных ниже данных, а *f* (*t*) – приращение стоимости при условии, когда *t* меньше своего максимального значения. Определите функцию *f* (*t*).

Операция	A	B	C	D	E	F	G	H
Предельная длительность	3	8	2	4	3	4	6	5
Нормальная длительность	8	15	9	8	6	9	11	12
Затраты на ускорение работы на единицу времени	3	2	6	5	4	7	3	8

Отношения следования: *A, D, E* не имеют предшествующих; *B, C > A; G, F >D, C; H > E, F*

Вариант 4

Строительство гидроэнергетического комплекса состоит из следующих работ: *a* – строительство дорог; *b* – подготовка карьеров к эксплуатации, закладка фундамента; *c* – строительство поселка; *d* – заказ оборудования; *e* – строительство завода; *f* – строительство плотины, дамбы и водосброса; *g* – строительство галереи и подводящих трубопроводов; h – соединение завода и трубопроводов; i – предварительные испытания:



Каждая работа может быть выполнена в нормальном ритме (нормальный план), и её выполнение может быть ускорено до некоторой минимальной продолжительности (срочный план), при этом ее стоимость возрастает. Зависимость стоимости работ от их продолжительности линейная. Продолжительность, мес. и стоимость всех работ, млн. руб., приведена в таблице.

Операции	Нормальный план		Срочный план		Стоимость ускорения за месяц
	продолжительность	стоимость	продолжительность	стоимость	
1	2	3	4	5	6
a	4	5	2	15	5
b	6	11	5	30	19
c	4	3	2	11	4

1	2	3	4	5	6
d	12	150	9	180	10
e	10	10	8	20	5
f	24	147	19	212	13
g	7	18	6	30	12
h	10	4	7	25	7
i	3	2	2	5	3

Найти критическое время выполнения проекта и указать способ сокращения критического времени проекта на 9 мес. при минимальном увеличении стоимости.

Вариант 5

Информация о проекте задана перечнем работ, их продолжительностью и последовательностью выполнения:

Работа	Каким работам предшествует данная работа	Продолжительность, мес.	Работа	Каким работам предшествует данная работа	Продолжительность, мес.
1	4, 5, 6	20	5	8	10
2	4, 5, 6	10	6	7	5
3	5, 6	8	7	8	5
4	8	20	8	–	10

А. Построить сетевой график проекта, найти критическое время проекта и критический путь.

Б. Пусть известно, что в i-ю работу можно вложить средства x_i, где $x_i <= c_i$, при этом время t_i выполнения работы уменьшится до $t_i(1-b_i x_i)$. Полагая $b_1 = 0.2$, $c_1 = 2$, $b_4 = 0.3$, $c_4 = 2$, $b_8 = 0.1$, $c_8 = 5$, определить размер вложенных средств x_1, x_4, x_8, в 1-ю, 4-ю и 8-ю работы так, чтобы время завершения всего комплекса работ не превышало 40 мес., а сумма вложений была минимальной.

Вариант 6

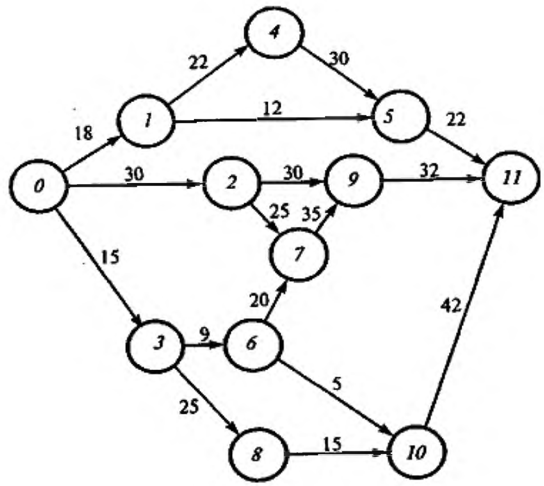
Сделать деревянный ящик (работу выполняет один человек). Разместить доски в соответствии с размерами ящика (15 мин.); разрезать доски (12 мин.); склеить части ящика (40 мин.); прибить к крышке ящика петли (8 мин.); подождать, пока ящик высохнет, вытереть его (15 мин.); петли (с крышкой) прибить к ящику (10 мин.). Построить сетевой график. Найти продолжительность выполнения комплекса работ, временные характеристики событий и работ. В скобках указана продолжительность работ.

Вариант 7

Заменить колесо машины (работу выполняют два человека). Достать из багажника домкрат и инструменты (40 с); снять колпак с колеса (30 с); освободить колесо (50 с); поставить домкрат под машину (26 с); поднять машину (20 с); из багажника взять запасное колесо (25 с); снять гайки и колесо (20 с); установить запасное колесо на ось (10 с); завинтить (не сильно) гайки на оси (15 с); опустить машину и собрать домкрат (25 с); поставить домкрат обратно в багажник (10 с); завинтить гайки на оси до конца (12 с); положить плохое колесо и инструменты в багажник (40 с); поставить на место колпак колеса (10 с). Построить сетевой график. Найти продолжительность выполнения комплекса работ, временные характеристики событий и работ. В скобках указана продолжительность работ.

Вариант 8

Для сетевого графика найти критический путь, рассчитать ранние и поздние сроки свершения событий, начала и окончания работ; определить резервы времени событий и работ:



В таблице указаны оценки времени выполнения работ сетевого графика, данные ответственными исполнителями и экспертами.

№ п/п	Работа (i, j)	Оценки времени выполнения работы, сутки		
		оптимистическая	пессимистическая	наиболее вероятная
1	*(1,2)*	5	9	6
2	*(1,3)*	2	7	5
3	*(1,4)*	4	10	8
4	*(3,4)*	9	14	11
5	*(2,5)*	7	13	10
6	*(4,5)*	1	4	3

Необходимо: а) построить сетевой график; б) определить средние (ожидаемые) значения продолжительности работ; в) определить критический путь и его длину. Полагая, что продолжительность критического пути распределена по нормальному закону, найти: а) вероятность того, что срок выполнения комплекса работ не превысит 17 суток; б) минимальное значение продолжительности выполнения проекта, которое можно гарантировать с надежностью 0,95.

Вариант 9

По данным таблицы необходимо: 1) построить сетевой график; 2) определить критический путь и стоимость проекта при минимально возможных значениях продолжительности всех работ; 3) найти минимальную стоимость проекта при том же сроке его завершения; 4) рассчитать и построить оптимальную зависимость стоимости проекта от продолжительности его выполнения, используя в качестве первоначального варианта сетевого графика: а) план с максимальными значениями продолжительности всех работ и соответственно минимальной стоимостью проекта; б) план, полученный в результате выполнения п. 3.

Работа	Нормальный план выполне-		Срочный план выполнения		Коэффициент затрат на ускорение работы
	min	max	min	max	
(12)	4	5	2	15	5
(1,3)	4	3	2	11	4
(1,4)	12	150	9	180	10
(2,3)	6	11	5	30	19
(2,4)	7	18	6	30	12
(3,4)	10	10	8	20	5
(3,5)	24	147	19	212	13
(4,5)	10	4	7	25	7
(5,6)	3	2	2	5	3

Библиографический список

1. Акоф Р. Основы исследования операций / Р. Акоф, М. Сасиени. М.: Мир, 1971.

2. Бородачёв С. М. Имитационное моделирование в экономике : учебное пособие / С. М. Бородачёв. Екатеринбург : УрФУ, 2010.

3. Бородачёв С. М. Методы математической статистики : учебное пособие / С. М. Бородачёв. Екатеринбург : УрФУ, 2012.

4. Вагнер Г. Основы исследования операций. Т. 1-3. / Г. Вагнер. М.: Мир, 1973.

5. Глухов В. В. Математические методы и модели для менеджмента / В. В. Глухов, М. Д. Медников, С. Б. Коробко. СПб.: Лань, 2000.

6. Дегтярев Ю. И. Исследование операций / Ю. И. Дегтярев. М.: Высшая школа, 1986.

7. Дубров А. М. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталев. М.: Финансы и статистика, 2000.

8. Исследование операций в экономике / Под ред. Н. Ш. Кремера / М.: ЮНИТИ, 1997.

9. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики / Ю. М. Коршунов. М.: Энергоатомиздат, 1987.

10. Кофман А., Фор Р. Займёмся исследованием операций / А. Кофман, Р. Фор. М.: Мир,1966.

11. Кузнецов В. В. и др. Системный анализ и принятие решений в деятельности учреждений реального сектора экономики, связи и транспорта / В. В. Кузнецов и др. Экономика, 2010.

12. Морозов В. В. Исследование операций в задачах и упражнениях / В. В. Морозов, А. Г. Сухарев, В. В. Фёдоров. М.: Высшая школа, 1986.

13. Орлов А. И. Теория принятия решений : учебное пособие / А. И. Орлов М.: Март, 2004.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Бородачёв Сергей Михайлович

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Редактор *О. В. Протасова*

Компьютерная вёрстка *авторская*

Подписано в печать 03.06.2014. Формат 70×100 1/16.
Бумага писчая. Плоская печать. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 10,08. Уч.-изд. л. 5,7. Тираж 80 экз. Заказ № 1168.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru

Для заметок